

= A VII 4 f

Die vierte Dimension,

ein Gespräch mit einem Toten.

Ich sass auf meinem Sofa und war noch ganz in die Uarda vertieft, als ich plötzlich einen ganz merkwürdigen Lärm auf der Strasse hörte. Ein Wiehern von Pferden und laute Stimmen von griechischer Zunge drangen an mein Ohr; ich sprang auf meinen Söller und sah nichts. Aber jetzt hörte ich den Portier im Innern des Hauses rufen. Die Pappe ist umgedreht; er muss also zu Hause sein; oben wohnt er. Da wollte ein Herr bei der ersten Etage klopfen. Höher! rief der Portier. Langsam stieg die Gestalt zur 2. Etage. Höher! rief wieder der Portier. Als der Fremde an die 3. Etage ^{an} gekommen war, rief ich von Oben. Ach, bitte, noch einige ^{zwanzig} Fuss nach Oben! Das muss ich sagen, bemerkte da der Fremde, als er vor mir stand, solche olympische Höhe als Wohnung habe ich weder in Athen noch in Stagira und Pella irgendwo gesehen. Ich war über diese seltsame Vergleichung nicht so sehr betroffen, als über die merkwürdige Vernahnheit des Mannes der in schönster, griechischer Kleidung und mit Sandalen und nackten Beinen wie ein antiker Marmor vor mir stand. Ich war deshalb in einiger Verlegenheit, vergass aber doch nicht höflich zu sein, sondern nötigte ihn herein und fragte, mit wem ich die Ehre hätte zu reden und was er von mir wünschte.

Der Fremde erwiederte, er wüßte meine Deduction der ^{vierten} 4. Dimension des Raumes kennen zu lernen und er sei Aristoteles, der Stagirite. Ich sah ihn ungläubig an und bemerkte halblaut. Dann sind Sie ja tot! Das macht gar nichts aus, antwortete er, wir Toten leben ebensogut wie Ihr, die man einige ^{vierzig} 40 bis ^{achtzig} 80 Jahre hindurch für lebendig hält. Schon gut, sagte ich darauf, aber wo leben Sie denn? und wie konnten Sie hierher kommen? Ich hörte Wagen und Pferde und sehe doch nichts. - Das ist doch wunderbar, beim Zeus, rief da lächelnd Aristoteles, dass Sie das nicht wissen. Wir leben ja in der ^{vierten} 4. Dimension; da stehen auch meine Pferde und Wagen und Begleiter. Und da Sie nun zu Hause sind, so kann ich auch wohl den Sokrates vorstellen, den ich mitgebracht habe. Aber, wo ist er denn? fragte ich etwas betreten. Hier steht er ja, sagte Aristoteles. Da ich etwas ängstlich um mich blickte und nichts gewahr wurde, so bemerkte der Stagirite: "Da Sie doch nicht recht bekannt ^{zu} sein scheinen mit der ^{vierten} 4. Dimension, so wollen wir Sokrates bitten, in den ordinären Raum von ^{drei} 3 Dimensionen herüber zu treten." Und siehe da, wahrhaftig, der Mann mit dem geistvollen Silenengesicht stand plötzlich und ganz leibhaftig vor mir. Mir wurde fast bänglich zu Mute, denn ich hatte nie im Leben eine solche Ueberraschung gehabt, obgleich ich mich doch mit den überraschenden Vagabunden, den Kometen, soviel abgegeben habe. Ich bat die Herren daher mit einiger Scheu, Platz zu nehmen. Aristoteles legte sich auch gleich der Länge nach auf mein ^{er} Sofa, als wie auf eine antike

Kline , Sokrates aber kauerte auf dem Fussboden und ich blieb in Verlegenheit über diese griechischen Gewohnheiten auf meinem Platze stehen .

Nach einer kurzen Pause , während der wir uns alle in die etwas befremdliche Situation zu finden suchten , begann Aristoteles ; " Ich habe nicht das Talent , durch Frage und Antwort mir Belehrung zu verschaffen und andere wiederum zu belehren . Ich liebe zu lesen und dann in Summa kurz in meinen Terminis zu recapitulieren . Daher gebe ich mich mehr mit der apodiktischen und systematischen Deduction ab und nehme gern den Sokrates zum Begleiter , der sich vortrefflich auf die Hebammenkunst versteht und die Begriffe nach allen Regeln in den ~~Seelen~~ zur Geburt zu bringen gelernt hat . Ich werde deshalb hier zuhören und der Sohn der Phänarete mag mit dir über unsre Angelegenheit verhandeln . Du bist doch bereit , uns über Deinen Beweis für die ^{vierte} Dimension aufzuklären . ? " "Mit dem grössten Vergnügen" erwiderte ich und sprang gleich an mein Schreibtisch , um eine Schere zu nehmen , langte dann aus dem Papierkorb ein schon abgedrucktes Manuskript hervor und fing an , meine Dreiecke auszuschneiden .

" Ei ! " sagte da Sokrates , "Du scheinst ja , beim Hunde ! Deine Beweise mit der Schere vortragen zu wollen " - "Wir Griechen " , bemerkte Aristoteles , "sind gewohnt , die Gründe ins Wort zu fassen, und ~~Versteht~~ wohl , dass Sokrates , als ihm ein Athener seinen Sohn vorstellte , ihn aufforderte , er möchte reden , damit er ihn sehe. Ohne Rede also wirst Du mit Sokrates nicht fertig werden . " - "Nur

Geduld " erwiderte ich , "an Worten soll es schon nicht fehlen ;
aber erst kommt die Anschauung , nachher denken und reden wir das
Nötige dabei . " Und sofort zeigte ich den beiden Griechen das Blatt,
klappte es zusammen und schnitt nun sauber ein rechtwinkliges ungleich-
seitiges Dreieck aus . Indem ich den Finger losliess , mit dem ich
die beiden Flächen auf einander festgehalten hatte , fiel^{zwei} nun \sphericalangle Drei-
ecke auf den Boden . Ich legte sie mit dem rechten Winkel aneinander
und sagte ; "da haben Sie ^{zwei} \sphericalangle symmetrische Figuren , die in allen Stücken
gleich sind und nur zwei Dimensionen besitzen . Versuchen Sie doch
einmal , sie kongruent zu machen durch Aufeinander schieben . " -
"Das geht ja auf keine Weise , " sagte Sokrates , wenn sie symmetrisch
sind." - "Ganz leicht ! " - sagte ich . " Freilich wenn man sie in
derselben Ebene dreht und wendet , so viel man nur will , so werden
sie nie auf einander passen und immer werden die Ecken des einen
über die Seiten des andern hervorstehen . Aber das ist eben das Ge-
heimnis ! Die Figuren sind doch ganz gleich , lauter gleiche Winkel,
lauter gleiche Seiten , mit dem gleichen Flächeninhalt und doch pas-
sen sie nicht auf einander . Wenn wir nun ein Anschauungsvermögen
von bloß ^{zwei} \sphericalangle Dimensionen des Raumes besäßen , so müssten wir bei die-
sen symmetrischen Figuren die Kongruenz leugnen . Ist es nicht so ?
Ritte , antworten Sie recht präzise ! " - Darauf sagte Sokrates ;
"Du sprichst die Wahrheit . " - - "Nun aber , sagte ich mit dem gröss-
ten Behagen , kommt der Witz . Wir können eben ^{drei} \sphericalangle Dimensionen anschau-
en . Darum legen wir die beiden symmetrischen Dreiecke an einander ,

klappen das Eine um , indem wir es den Weg durch die 3. Dimension machen lassen , und siehe da , sie sind ganz kongruent ." - " Aber wo bleibt die ^{vierte} 4. Dimension ? " fragte Sokrates . - " Nur Geduld ! " mahnte ich , " erst will ich wissen , ob Sie meinen Beweis zugehen . - " Ich bin schwer von Begriffen erwiderte dieser Ironiker , " ich begreife noch gar nichts davon , aber vielleicht ist es Dir angenehmer erst ganz Deinen Gedankengang zu Ende zu gehen , als von mir die Kreuz und Quer geführt zu werden , weil ich hundert Fragen in der Seele habe , die mich schon quälen und die ich Dir zur Lösung vorlegen muss , wenn ich vergnügt von dannen ziehen soll . " - " Nun gut , " sagte ich " so lasst mich nur erst zu Ende kommen . Wir haben jetzt also ^{drei} 3 Dimensionen . Besieh Dir nun einmal Deine beiden Hände . " - " Ich sehe sie , " sagte Sokrates , und merke , Du willst , dass sie ^{zwei} 2 symmetrische Körper vorstellen sollen . " - " Vortrefflich " , sagte ich und erinnerte ihn nur daran , dass er die natürlichen und zufälligen Ungleichheiten derselben wegdenken und sie nur als handgreifliches Beispiel für ^{zwei} 2 symmetrische Figuren von ^{drei} 3 Dimensionen auffassen sollte . " Sie müssen sich natürlich auch die Widerstandskraft und Undurchdringlichkeit der Materie wegdenken " , fügte ich hinzu , denn wir wollen es jetzt mit den Händen ~~es~~ ebenso machen , wie mit den Dreiecken . Da an beiden Händen alle Proportionen dieselben sind , die Länge , Dicke und Breite der Finger , die Ordnung der Finger vom Daumen bis zum kleinen Finger , die Handfläche und der Handrücken und so ~~Alle~~ und jedes ; so ist doch klar , dass sie kongruent sein

müssen , wenn man sie aufeinander legt . Aber , oh Wunder , lege man sie , wie man wolle , sie fallen nie zusammen . Legt man Daumen auf Daumen und so der Reihe nach alle Finger , und schiebt die eine Hand dann in der Phantasie durch den Raum der andern hindurch , so fällt die Handfläche auf den Handrücken der andern , und es passt nicht . Legt man sie anders herum , so kommt der Daumen auf den kleinen Finger zu liegen . Kurz es geht auf keinen Fall . Nun merken Sie wohl schon den Witz ? " - "Ich merke noch nichts , sagte Sokrates, aber ich vermute , was Du folgern wirst " - "Ja gewiss , sagte ich , muss ich jetzt folgern , dass diese ^{zwei} 2 symmetrischen Körper , weil sie in allen Stücken gleich sind , auch kongruent werden können , wenn man sie nur in der ^{vierten} 4. Dimension umklappt . Da haben wir die ^{vierte} 4. Dimension sonnenklar ! " - "Ha ha ha ! guck einmal ! so ! " schaltete es da plötzlich in meinem Zimmer , ohne dass Aristoteles oder Sokrates den Mund bewegten - "Das ist ja ganz gruselig , sagte ich sind wir denn nicht allein ? " - "Ach! sagte Sokrates , sahst Du denn den Aristophanes nicht herein kommen ?" - "Nein beim Teufel rief ich , den sah ich nicht und hier ist sicher ein Gespensterspuk im Spiel ." - " Nicht im Mindestens " sprach jetzt sichtbar hervortretend der lustige Aristophanes "ich dachte nur , Du hättest mich sehen können , da Du doch just die ^{vierte} 4. Dimension fertig demonstriert hattest und ich Dir zu Gefallen meine Hände nach Deinem Programm umklappte ." " Zeigen Sie einmal ! Zeigen Sie einmal ! schrie ich jetzt laut vor Vergnügen . - "Nun gut denn , so guck nur her , so!

und im selbigen Moment war er wieder verschwunden .- "Aber ich sehe ja nichts "sagte ich ärgerlich .- " Streng Dich an ! rief er , hier guck ! so ! " - "Nein , sagte ich dadurch werde ich nicht klüger wenn Sie verschwinden " - Da trat Aristophanes wieder ^{her} vor und bemerkte lachend ; ich soll Dir die Sache doch nicht gar in dem ordinären Raum von ^{drei} Dimensionen zeigen ! " - "Ja freilich , fiel ich ein . " Denn vor Freude vergass ich , dass das nicht angeht ; aber sagen Sie mir bitte , wie macht man es denn , die ^{vierte} 4. Dimension und was darin vorgeht , zu erblicken ? " - "Das ist sehr leicht , antwortete Aristophanes , es gilt nur einen kleinen Handgriff . " - "Bitte , bitte ! " rief ich , nicht gezaudert , heraus mit der Sprache , das muss ich daraus lernen ! Sie bleiben dafür heute mein Gast , wir gehen zusammen in den Rosengarten und des Abends führe ich Sie in die Komödie ! " - "Führen Sie meine Frösche auf oder was spielen sie heute ? " fragte Aristophanes .- " Ach bitte , rief ich in brennender Ungeduld , lassen wir das auf nachher . Erst muss ich hinter das Geheimnis kommen . Ich habe ja auch noch hundert gelehrte Beweise aus der Mathematik und Physik , womit ich die ^{vierte} 4. Dimension demonstriere , aber ich möchte sie gerne sehen . " - "Die gelehrten Beweise schenke ich Dir , sagte der Komiker , die sind nicht für mich und für solche Leute , die sich einmal amüsieren wollen . Willst Du aber die ^{vierte} 4. Dimension mit Augen sehen , so begib Dich zu dem geschickten Mechaniker Wundt und lass Dir von ihm einen Kautschukschädel machen , den Du an die Stelle Deines knöchernen einschübst , damit Du nach

Belieben das Gehirn quetschen und die isolierte Funktion jedes Organs erreichen kannst. Du musst Dir zu diesem Zweck von ihm noch einige Knöpfe mit Aufschriften ~~neen~~ ansetzen lassen, die Du als Drücker benutzt. Drückst Du nun ^{früher} 5 Knöpfe vorn, die mit Leitungen nach unten und nach der Mitte zu führen, so lähmst Du sofort alle Sekhügel und die übrigen Organe der Sinneswahrnehmung. Das ist vor allen Dingen nötig. Dann drückst Du zugleich oben und lähmst damit die irdische Intelligenz. Nun noch ein Druck von beiden Seiten, um die ordinären sogenannten richtigen Meinungen zusammen zu quetschen: dann kannst Du plötzlich die ^{vierte} 4. Dimension sehen und Alles, was sich darin bewegt. Gleich z. B. siehst Du Deine Hände völlig kongruent und umgeklappt, dann siehst Du den Kerl, der die Aufhebung des Gravitationsgesetzes im Dahheim verkaufen wollte und den Pantenius lächerlich machte, weil er nicht wusste, dass der kleine Draht dazu dient, um den schwersten Körper durch blosse Molekularschütterung in die ^{vierte} 4. Dimension zu versetzen, wo er sofort kein Gewicht mehr hat. Dort kannst Du auch die Gespenster und Hexen und die alten Götter sehen und was sehr lustig ist, wie das Blei auf dem Wasser schwimmt, und dann dass von euren Logikern mit ihrer kindischen Vernunft verachtete und doch so allerliebste hölzerne Eisen u.s.w. " - "Es ist genug, rief ich, Sie kommen nicht mit ins Theater, sondern ich werfe Sie sofort aus dem Fenster." Ich wollte nun alle meine Kräfte zusammennehmen und klingelte zur Hülfe auch nach dem Portier; aber der Spassvogel war schon in die ^{vierte} 4. Dimension abgetrollt und ich hat-

te das Nachsehen .- Da sagte Sokrates ; Ärgere Dich nicht , lieber Freund ! Diese Spässe sind ja noch harmlos , da er sie Dir privatisime vorträgt . Bedenke , wie er mich in seinen Wolken öffentlich auf dem Theater maltrahiert hat . Wenn ich ~~nicht~~ nicht durch meine Xantippe die Schule der Geduld durchgemacht hätte , was hätte ich erst anfangen sollen ! Nein , lass ihn ruhig ziehen , oder lass uns versuchen , Deine Deduction der ^{vierten} 4. Dimension ordentlich durchzugehen ; denn wenn Du uns gehörig überzeugst , so wird auch die nötige Anschaulichkeit der Sache zuletzt nicht fehlen können und ich verspreche Dir dann , dass Aristoteles und ich mit Dir zusammen den Schalk schon erblicken und binden werden , sodass Du ihn dann strafen kannst , indem Du ihm mit seinem hölzernen Eiden den Mund knebelst ."

Da lachte ich und war sofort aufgelegt , wieder die Demonstration der Dreiecke mit der Schere vorzunehmen . Sokrates aber sagte ; "Du beweisest , dass symmetrische Dreiecke durch Zuhilfenahme der ^{3. Dimension} 3. Dimension , d. h. durch Umklappen , kongruent werden ." - "Ja erwiderte ich , das weiss jeder Schulbub , der ein Paar Geometriestunden gehabt hat . Diese ausgemachte Sache dient mir deshalb als ~~Evidente~~ Evidente der Analogie , um die ^{vierte} 4. Dimension für die symmetrischen Körper zu fordern ." - "Halt ! rief Sokrates , ist die Sache denn wirklich so ausgemacht ? - " Und Du zweifelst doch nicht etwa " bemerkte ich etwas spöttisch .- "Gar sehr" , sagte Sokrates wieder . "Denn siehst Du , ich merke an den umgeklappten Dreiecken nicht mehr die Eigenschaft , die Du ihnen zuschriebst , symmetrisch zu sein , da sie nun

ja ganz aufeinander fallen und nur eine einzige Figur bilden ." -
"Tausend noch einmal ! rief ich , Du verlangst doch nicht am Ende ,
dass sie konguieren und zugleich symmetrisch ~~aus~~ aufeinander liegen sol-
len ? " - "Vortrefflich , erwiderte Sokrates , so bekennst Du also,
dass symmetrische Figuren niemals kongruent sein können , weil beide
Begriffe sich ausschliessen . - " Aber , sagte ich etwas zögernd ,
denn ich fühlte die Wahrheit seines Einwandes , obgleich mir die
Sache noch nicht ganz durchsichtig war , " aber man kann sie doch
umklappen ? " - "Das kann man allerdings , wenn man ihnen die Eigen-
schaft wieder nimmt , die man in ihnen gesetzt hatte . Denn diese
Dreiecke sind in allen Proportionen identisch und es wäre lächer-
lich von ^{zwei} 2 Dreiecken , statt von einem zu sprechen , wenn man nicht
eine entgegengesetzte Qualität ihnen zugeteilt hätte , durch welche
sie auseinander gehalten werden und solange auseinander bleiben ,
als man diese Entgegensetzung nicht wieder aufhebt . " - "Ich ver-
stehe , sagte ich , Du meinst , die Lehre von der Kongruenz bedeute bloß
die Formulierung der Bedingungen , unter denen nur eine einzige Figur
vorgestellt werden kann , und Du verlangst , für die Vielheit quali-
tative Differenzen , die sich bei den symmetrischen Figuren in dem
Gegensatz der Richtung zeigen ." - "Ja freilich , sagte er und füg-
te lächelnd hinzu ; "Du kennst doch wohl meine Leidenschaft für die
Induktion und Analogie . So habe denn etwas Geduld und denke Dir z.
B. ^{zwei} 2 Schlachberichte . Der türkische General schreibt , wir (die
Türken) haben den Feind geworfen . Der Russe schreibt ebenso von

derselben Schlacht, wir ^(die) (Russen) haben den Feind geworfen. Da diese Berichte identisch sind, so würden sie völlig kongruieren, wenn nicht in dem "Wir" ein solcher Gegensatz, wie er zwischen Russen u. Türken besteht, steckt, sodass man solche Berichte sogar für völlig ~~und für unvereinbar~~ ^{unvereinbar} erklärt. Sobald wir aber diese Differenz wegdenken, so können wir getrost umklappen und die Kongruenz ist fertig. Auch ist es doch wohl so mit allen Dingen. Sie sind immer, auch wenn sie noch so verschieden sind, in einigen Stücken identisch und daher partiell kongruent z.B. Mücke und Elefant sind doch als Tiere identisch und werden deshalb beide in der Zoologie abgehandelt und nicht das eine von beiden in der Botanik. Nimmt man nun die Verschiedenheiten allmählich weg z. B. die der Grösse, der Lebensweise, der Organisation u.s.w. und gleicht sie dadurch aus, so kommt zuletzt ein und dasselbe Wesen heraus. Bei den Zahlen ist 6 u. 4 partiell kongruent, und lässt man die Differenz 2 aus den Augen, so sind sie ganz kongruent. So musst Du auch bei der Kongruenz symmetrischer Flächen die Differenz der Richtung wegdenken, oder sie bleiben unvereinbar. Denkst Du aber diese Differenz weg, so kannst Du nicht mehr von symmetrischen Figuren sprechen; ebenso wie, wenn Du aus einer Mücke einen Elefanten machst, Dir die Mücke notwendig verschwinden muss. " - "Deine Betrachtungsweise ist allerdings unwiderleglich, sagte ich, und ich liebe an den Griechen immer diese für uns Moderne so überraschende Einfachheit. Aber dennoch wirst Du mir doch zugestehen, dass die Differenz der Richtungen

in den symmetrischen Dreiecken eben nur durch die ^{2. Th} 2. Dimension beseitigt werden kann, eben durch das Umklappen?" - "Nein sagte Sokrates, eben um der Einfachheit willen kann ich es wohl nicht zu geben und Du wirst auch wohl nicht behaupten, dass Du bloss die ^{3. Th} 3. Dimension nötig hättest?" - "Und was denn noch etwa?" fragte ich. - "Doch sicherlich, sagte er, noch die Bewegung, ohne welche das Umklappen nicht zustande käme. Wir würden daher einfacher verfahren, wenn wir die Figur in derselben Ebene liessen und blos die Linien beweglich dächten; denn es brauchen die nach links gehenden Linien blos nach rechts zu fließen, so würde, da die Länge der Linien und ~~die~~ Winkel vorgeschrieben sind, durch dieses blosse Rechtsumkehrt auch in derselben Ebene die Differenz der Richtung am Einfachsten aufgehoben werden und somit Kongruenz entstehen." - "Das ist sehr wahr, sagte ich, aber wenn wir uns das Dreieck als starr denken, so kann doch nur das Umklappen helfen durch die 3. Th dritte Dimension und die Bewegung." - "Ja freilich, erwiderte Sokrates lächelnd, aber wer nötigt uns, es starr zu denken, da wir es doch in dem flüssigsten und bildsamsten Elemente vorstellen, nämlich in der geometrischen Phantasie, die williger als Wachs und Ton jede Umgestaltung erlaubt. Nehmen wir nun aber die ^{3. Th} 3. Dimension hinzu, so kann das starrvorgestellte Dreieck sich allerdings geräuschlos in seinen Angeln drehen und kongruent werden. Doch was nützt Dir dieses Zugeständnis?" - "Was es mir nützt?! rief ich, das ist ja grade der Witz! So gut die ^{3. Th} 3. Dimension für die Kongruenz

enz symmetrischer Dreiecke Postulat ist, so ist die ^{vierte} 4. Dimension ein Postulat für die Kongruenz ^{von} symmetrischen Körpern! Denn da diese in allen ihren Proportionen identisch sind, so müssen sie sich auch decken können, was im Raum mit ^{drei} 3. Dimensionen nicht vorstellbar ist, im Raum mit ^{vier} 4. Dimensionen sich aber sehr leicht vollziehen wird. Habe ich Dich endlich überzeugt mit dieser so einfachen Folgerung?" -

Sokrates schien in Nachdenken verloren und schwieg. Es schien mir, als wolle er sich endlich gefangen geben und ich hatte schon die Hoffnung, er werde nun auch darauf eingehen, denn Aristophanes aus der ^{vierten} 4. Dimension heraus zu hetzen und knebeln zu lassen. Allein nach kurzer Weile lächelte er und sagte: "Du kennst gewiss die Vorstellung der Inder, die bei Euch jetzt noch besser bekannt sind, als zu unserer Zeit. Sie sahen, dass jeder Körper fällt, der nicht gestützt wird. Nun werden alle Körper um uns schliesslich von der Erde getragen und kommen durch diese Stütze zur Ruhe. Aber wer trägt die Erde? Niemand anders, als ein starker Elefant. Und der Elefant? Er steht auf dem breiten Rücken einer Schildkröte. Ich sehe, Du lachst." - "Wie sollte ich anders?" - "Das Lächerliche daran ist doch aber ^{erstens} $\frac{1}{2}$, dass diese Phantasie ins Unendliche führt; denn was man auch wieder unterlegen möge, es bedarf immer wieder einer neuen Stütze und sofort in *Infinitum*. Die Betrachtungsweise muss also falsch sein, weil sie durch die Natur des angeführten Grundes selbst niemals zum Abschluss kommen kann. Du gibst doch zu,

dass es sich so verhält ? " - ich nickte bejahend . - ^{Zweitens} "2. aber ,
fuhr er fort , ist auch das lächerlich , dass die Inder von Elefan-
ten und Schildkröten sprechen , die kein Mensch gesehen hat und
sich weder vorstellen noch denken kann . Die Ursachen also , die
sie anbieten , liegen gänzlich ausser dem Bereich unserer Erkennt-
nis und können uns als ein unnahbares Asyl für das Nichtwissen ,
aber niemals als eine Erklärung dienen . Oder meinst Du , dass man
klüger würde als zuvor , nachdem man die Erde auf den Elefanten ge-
stellt hat ? " - "Wie sollte ich das meinen ! " sagte ich . "Es sind
das ja leere Fixtionen . Aber warum schweifst Du zu den Indern ab
und bleibst nicht bei ~~der~~ Sache ? " - "Wir sind mitten ^a drin , ant-
wortete er , denn Du bist der Inder und stellst zuerst vernünftig
die Kongruenz symmetrischer Dreiecke auf die ^{dritte} 3. Dimension , die wir
deutlich und klar in unsrer Raumanschauung vorstellen können und
mit deren Hülfe wir den Gegensatz der Richtung in den symmetrischen
Figuren wieder durch Drehung oder Umklappen aufheben . Dann aber
stellst Du die Kongruenz der symmetrischen Figuren von ^{drei} 3 Dimensionen
auf den Elefanten der ^{vierten} 4. Dimension und ich fürchte fast , Du wirst
dann auch die symmetrischen Figuren von ^{vier} 4 Dimensionen auf die Schild-
kröte der ^{fünften} 5. Dimension absetzen und so ohne Erbarmen mit unsrer armen
Intelligenz immer weiter fortfahren . Du betrittst also einen
Weg der mit ^{zwei} 2 logischen Fehlern gepflastert ist , mit dem progressus
in infinitum und mit dem asyllum ignorantiae , und auf dem man nur
gehen kann , wenn man ~~nur~~ vorher die Schwerkraft der Logik abgeworfen

hat und *imponderabel* geworden ist." - Ich schwieg und sann nach ; denn ich musste ihm *Recht* geben . - " Wenn Du aber sagts , fuhr Sokrates fort , dass wir in einem Raum mit ^{*vier*} 4 Dimensionen leben müssen , obgleich wir nur ^{*drei*} 3 davon anschauen können : so nehme ich an , dass dieses Wort Dir nur so widerwillen entschlüpft ist ; denn ich weiss ja , dass Du soweit dem Kant nachfolgst , als Du überhaupt den Raum nicht als Eigenschaft der Dinge an sich betrachtest , sondern nur der Erscheinung , d.h. unsrer Vorstellungen . Folglich kann nicht davon die Rede sein , dass wir in einem Raum von ^{*vier*} 4 Dimensionen leben da Du ja selbst behauptest , dass wir nur ^{*drei*} 3 anschauen können . Unmöglich können dem Dinge an sich also ^{*vier*} 4 Dimensionen zukommen , da wenigstens ^{*drei*} 3 davon ihm nach Deinem Urteil überhaupt nicht angehören . Wenn der Raum eine Eigenschaft der Dinge an sich wäre , so könnte man allenfalls noch von einer ^{*vierten*} 4. Dimension sprechen , die wir nur noch nicht erkannt hätten , wie z. B. die Gesetze der Elektrizität zu meiner Zeit noch nicht bekannt waren . Ist der Raum aber die Anschauungsweise des Subjekts , so kann von der ^{*vierten*} 4. Dimension , also von einer Anschauung , die wir nicht haben , nicht mehr die Rede sein ." -

Dieses letzte Argument überzeugte mich völlig und ich hatte nichts mehr einzuwenden . Dessenungeachtet blieben mir die Probleme selbst noch immer ungelöst . Ich fragte deshalb den Sokrates , ob er denn nun etwa meine , dass auch das Problem von mir haltlos sei? - "Nicht im *Mindesten* , erwiderte er , ein so guter Kopf , wie

Du, der in den empirischen Wissenschaften so viele Entdeckungen gemacht hat, wird nicht leicht etwas denken, das nicht des Nachdenkens wert wäre. Wenn Du willst, so wollen wir der Sache auf den Grund zu kommen suchen! - Ich war sehr bereit, mit ihm zu forschen. -

"Lass uns nun ^{sagte er,} mit den symmetrischen Dreiecken beginnen. Wir finden ^{zwei} identische Figuren, die durch den Gegensatz der Richtung auseinander gehalten werden und sich nicht decken können. Wenn wir nun die Congruenz fordern, so heisst dies nichts anders, als wir wollen den Grund wissen, wodurch das Identische und deshalb Congruente in Gegensatz gebracht wurde. Diesen finden wir im Raum mit ^{drei} Dimensionen, in welchem eine identische, begrenzte Fläche rotirt und deshalb alle möglichen Lagen annehmen kann. Jede der möglichen Lagen ist von der andern verschieden; den grössten Gegensatz aber bilden die beiden Lagen, in welchen die identische Figur in eine und dieselben Ebenen fällt. In dieser Lage nennen wir die identische Figur, wenn wir in der Anschauung das Bild festhalten, und es trotz der Drehung als bleibend denken, symmetrisch mit derselben Figur in der entgegengesetzten Lage. Die Forderung der Congruenz und das Umklappen ist also nichts anderes, als die bekannte Forderung der Logik, wonach das Entgegengesetzte aus der gattungsmässigen Einheit durch die spezifische Differenz abgeleitet werden soll. Ist Dir dies einleuchtend geworden?" - "Vollkommen sagte ich, und ich wünsche nur, dasselbe bei der vierten Dimension ebenso deutlich einzusehen."

"Das ist nicht schwer, sagte Sokrates, wenn Du nur nicht verlangst, dass die vierte Dimension doch am Ende noch zum Vorschein

kommen soll . " - " Ich verzichte feierlich auf die vierte Dimension erwiederte ich , wenn Du die Sache ebenso deutlich zu erklären verstehst . " - " Wir wollen versuchen , antwortete er . Die Sache selbst muss ~~das~~^{uns} führen . Wodurch ~~aber kam~~ die Congruenz der symmetrischen Dreiecke zu Stande ? Antworte nach der gewonnenen Einsicht ? " "Durch den Raum mit drei Richtungen , sagte ich , in welchen die Figuren jede beliebige Lage annehmen können . " - "Gut" , sagte er , und die Differenz ? " - " Durch die Natur der Ebene , erwiederte ich , in welcher die Drehung nicht mehr möglich ist . " - "Nun also , fuhr er fort , müssen wir denselben Gedankengang bei den symmetrischen Körpern nehmen . Der Grund des Gegensatzes , der die symmetrischen Figuren differenziert , liegt offenbar in der Räumlichkeit selbst . Denn der Raum ist nicht eher für die Anschauung vorhanden als bis man die Phantasie nach verschiedenen Richtungen zu führen vermag . Wir haben deshalb im Raume sofort ein Oben und Unten , ein Rechts und Links , ein Vorn und Hinten . Ohne diese Gegensätze der Richtungen gibt es keinen Raum . Folglich muss die Symmetrie der Körper , sofern sie auf dem Gegensatz der Richtung beruht , diese ihre spezifische Natur der Beschaffenheit und ideellen Entstehung des Raumes selbst verdanken . Bist Du einverstanden ? " - Dies unterliegt keinem Zweifel sagte ich , aber ich sehe noch keine Möglichkeit , die Identität der Figuren in der Gattungseinheit ebenso deutlich zu entdecken , da uns leider die Anschauung der vierten Dimension versagt ist . "

"Vielleicht , erwiederte Sokrates , finden wir das Gesuchte nicht so schwer , als es scheint . Die Identität der Figuren besteht nämlich nicht in etwas Räumlichem , da das Wesen des Raumes aus der

Differenz der Richtungen stammt . Willst Du ihre Identität zeigen, so mußt Du messen , also zählen . Du findest dann in beiden Figuren die gleichen Zahlenverhältnisse . Die vierte Dimension ~~aber~~ hätten wir schnell gefunden . ; sie wohnt aber nicht im Raume , sondern im Hause der Arithmetik ; , denn der Raum stellt eben die Möglichkeit her , das identische Zahlenverhältnis nach entgegengesetzten Richtungen hin zu entwerfen und also symmetrische Körper zu erzeugen . Fehlt Dir etwas an der Deutlichkeit der Einsicht ? Du wünschst doch nicht , dass wir den Grund der Einheit symmetrischer Figuren da suchen wo der Grund ihrer Verschiedenheit steckt , nämlich im Raume ? Oder sollen wir wirklich die Erde auf den Elephanten und diesen auf die Schildkröte stellen ? " - Spotte nicht weiter , sagte ich , denn ich bin schon überzeugt . . Es geht nur nicht so leicht , langange- wöhnte Vorstellungen mit einem Ruck abzuwerfen . Vielleicht vermagst Du es , mich an Deine neuen Gedankengänge mehr zu gewöhnen durch weitere Betrachtungen . " -

"Ja , sagte Sokrates , "wenn Du das bloß willst , so bist Du bei mir an den rechten Mann gekommen , denn wenn man mich nur reden lässt , so geht das ohne Ende fort Tag und Nacht , und Du weißt ja , wie ich auch selbst bei Gastmählern , wenn die Änderer wie bei unserm Dichter Agathon vom Wein beschwert unter den Tisch sinken , immer fort-rede , solange mir nur noch einer zuhören mag . " - "Ich lächelte und sagte , : " wenn dies nicht etwa eine Anspielung darauf sein soll , dass Du Wein verlangst , so rede nur fort , denn ich bin von ganzer Seele aufgelegt , Dich noch etwas weiter zu hören , bis ich mich in die neue Ueberzeugung ganz hinein gewöhnt habe . " -

"Ich denke , erwiderte Sokrates , es geht ohne Wein das Gespräch noch besser von Statten . Denn nicht alle sind gegen den Rausch so abgehärtet wie ich , und wir möchten sonst leicht von dem Bacchus verführt , uns wieder in die vierte Dimension verirren ." - "Du bleibst doch immer , sagte ich etwas kräftig , der unverbesserliche Ironiker.

"Gehen wir also nüchtern , sagte Sokrates lächelnd , an die trockenen Zahlen ! Eine jede ist von der andern verschieden ihrer Grösse nach . Dennoch merken wir sehr bald , dass viele Zahlen oder Zahlverhältnisse trotz ihrer Verschiedenheit als Zahlausdrücke ein und denselben Wert haben . Diese ihre Einheit lässt sich aber nicht ^{wieder} (in Zahlen ausdrücken , weil ja jede Zahl von der andern verschieden ist und entweder kleiner oder grösser . Ich sage Dir bekannte Dinge , die Du besser verstehst als ich ; denn ich bewundere Dich als grossen Meister in der Mathematik . Erlaube daher , dass ich Dich kurz erin-
nere dass Du mit ^{Sie} Identität der Zahlenverhältnisse schliesslich in einer Buchstabenformel ausdrückst . Diese ist also die vierte Dimension für die Differenzen , die in den Zahlen gegeben sind und nicht wieder auf eine gemeinschaftliche Zahl zurückgeführt werden können . Nimm z. B. die Formel für den goldenen Schnitt und vergleiche damit die vielen einzelnen gegebenen Zahlenverhältnisse , die untereinander nach dem Zahlenwerte unvereinbar sind , dem Gesetze der Formel genäss aber konguiren " . - " Ich gestehe , sagte ich , dass mir Deine Auffassung jetzt deutlicher und plausibler wird . Auf weitere Beispiele verzichte ich aber allerdings , weil die Sache uns Mathematikern bekannt ist und ich deshalb nicht zuhören würde , wenn Du Deiner Nei-

gung zu reden in dieser Richtung die Zügel schiessen lassen wolltest."

Seht gut, sagte Sokrates, wenn die Sonne scheint, braucht man allerdings kein Licht anzuzünden. So gehen wir also weiter. Du siehst aber auch bei den Buchstabenausdrücken wieder entgegengesetzte Funktionen, die doch unter ein gemeinschaftliches Gesetz fallen. So z. B. sind die Funktionen des Potenzierens, Radizierens und Logarithmirens sehr verschieden; dennoch ist dabei jedesmal eine Grösse durch zwei andre bestimmt. Das einheitliche Gesetz dieses wechselseitigen Zusammenhangs oder wenn wir die Metapher^{hier} wagen wollen, dieser Congruenz der drei Funktionen kann aber nicht wieder in Buchstaben ausgedrückt werden, sondern verlangt eine Erklärung in Begriffen, so sind also die Begriffe die zu suchenden "vierte Dimension" für die "symmetrischen Gegenstände in dem Gebiete der allgemeinen Grössebezeichnung". - "Auch dies, sagte ich, ist mir einleuchtend, Ich bin aber neugierig, ob Du nun am Ende auch von dem Elefanten auf die Schildkröte gelangen wirst" -

Beim Hunde, rief da Sokrates, das wäre eine schlimme Sache. Ich bitte Dich aber da zu bemerken, dass unser jetziges Verfahren himmelweit d. h. sachlich verschieden ist von jener Indischen Irrfahrt ins Unendliche. Denn ihr Fehler bestand darin, dass sie innerhalb desselben Gebietes der mechanischen Ursachen ~~blieben~~ und für A ^{uns} das B als Ursache boten, für dieses C ~~und~~ wieder d und so fort. Für jede dieser Ursachen erhebt sich dieselbe Frage. Deshalb schliesst jede Lösung ^{die sie geben} ~~dies~~ Problem, wieder dieselbe Frage in sich, und die Antwort ist in der Tat nur ein anderer Ausdruck für dasselbe Problem.

Wir aber erheben uns mit jeder Antwort über das ganze Gebiet, in welchem das Problem auftaucht. Von der Ausdehnung gehen wir zur Zahl von dieser zum allgemeinen Buchstabenausdruck, von diesem zum Begriff. Mit jeder Stufe sind wir ein in einem neuen Gebiete. - "Und doch, warf ich ein, scheint sich auch bei diesem qualitativen Prozess ein neuer Progressus in Infinitum zu zeigen". - "Du hast Recht", antwortete Sokrates, dass es so scheint. Es tritt nämlich auch hier eine Symmetrie der differenten Prozesse auf, die eine Congruenz verlangen und doch wegen ihrer Differenz sich nicht decken können. Sie confluiren aber sofort in dem allgemeinen Begriff der Kausalität, die sich differenziert in die mechanische und die qualitative. Sobald wir aber zum Begriff oder dem reinen Gedanken selbst gekommen sind, so hört alle Unruhe auf und wir sind am Ziele". - Das wäre ja eine herrliche Sache, sagte ich, aber jetzt ist's Zeit, ein Licht anzuzünden; denn hier scheint mir die Sonne untergegangen zu sein. - Sokrates lächelte und wandte sich an Aristoteles, der noch immer würdevoll auf meine Kline lag und unsre ganze Verhandlung wie eine Bagatellsache ziemlich gleichgültig anzuhören schien; "Würdest Du das Gespräch nicht jetzt übernehmen; denn wir sind ja bis in Dein Gebiet gekommen und ich habe ~~von~~ ^{nur} von dem Gotte ~~den~~ Befehl, die Wehen des Geistes zu lindern und die Geburt der Begriffe heilkünstlerisch zu leiten, bis sie ans Licht kommen. Von diesem Licht aber seiest Du ja, dass die Menschen wie Fledermäuse davon geblendet werden und dass nur der Weise geübte Augen hat, um es zu lieben und darin zu sehen. Uebernimm also jetzt meine Rolle und lass mich zuhören." -

(Manuskript bricht ab.)