

V. Die Klassifikation der Endomorphismen
endlichdimensionaler Vektorräume

Einleitende Bemerkungen zum Klassifikationsproblem	1
 § 11 Normalformen	
11.1. <i>Überblick über die Klassifikation</i>	2
Definition der Jordanschen Normalform• Die Analyse der Jordanschen Normalform: Jordan-Zerlegung in halbeinfachen und nil- potenten Anteil, verallgemeinerte Eigenraum- zerlegung•Synthese: Konstruktion von Jordan- zerlegung und Jordan-Normalform	
11.2. <i>Die Klassifikation nilpotenter Endomorphismen</i>	7
Nilpotente Endomorphismen und Matrizen, Nilpotenzindex•Analyse nilpotenter Endomorphismen• zyklische Unterräume, erzeugende Vektoren• kanonische Filtrierung durch die Kerne der Po- tenzen eines nilpotenten Endomorphismus•Die Normalform nilpotenter Endomorphismen•Die Klassifikation nilpotenter Endomorphismen und Matrizen	
11.3. <i>Eigenwerte, Eigenräume, Jordan-Zerlegung</i>	21
Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren• Charakterisierung von Eigenwerten als Null- stellen des charakteristischen Polynoms•Eigen- werte in \mathbb{R} und \mathbb{C} •algebraischer Abschluß von Körpern•elementarsymmetrische Funktionen• Skalarerweiterung für Vektorräume und Endomor- phismen•Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms als Funktionen auf $M(n \times n, K)$ •Die Spur einer Matrix•das Einsetzen von Endomorphismen und Matrizen in Polynome•das Minimalpolynom eines Endomorphismus•Charakterisierung nilpotenter Endomorphismen durch Eigenwerte, charakteri- stisches und Minimalpolynom•halbeinfache und diagonalisierbare Endomorphismen und Matrizen• verallgemeinerte Eigenvektoren und Eigenräume• der Euklidische Divisionsalgorithmus für Poly- nomringe•die verallgemeinerte Eigenraumzerlegung und die Konstruktion der additiven Jordan-Zerlegung• Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung•Existenz und Eindeutigkeit der additiven und der multiplikativen Jordan-Zerlegung für Endomorphismen bzw. Automor- phismen von Vektorräumen über perfekten Körpern	
11.4. <i>Die Jordan-Normalform</i>	71
Der Satz über die Jordan-Normalform von Matrizen	

11.5. *Elementarteiler*

75

Definition der Elementarteiler einer Matrix•die Elementarteiler einer Matrix in Jordan-Normalform•Klassifikation der Konjugationsklassen von Matrizen durch die Elementarteiler für algebraisch abgeschlossene Koeffizientenkörper•Beziehungen zwischen Elementarteilern, Minimalpolynom und charakteristischem Polynom•Der Satz von Cayley-Hamilton

11.6. *Die Klassifikation bis auf Konjugation*

86

Klassifikation als algorithmisches und als strukturelles Problem•Klassifikation von Konjugationsklassen von Matrizen mit Koeffizienten in beliebigen Körpern durch die Elementarteiler•Charakterisierung halbeinfacher Matrizen•reguläre halbeinfache Matrizen•reguläre Matrizen•die charakteristische Abbildung $\chi: M(n \times n, K) \rightarrow K^n$ durch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms• χ identifiziert die Konjugationsklassen halbeinfacher Matrizen mit K^n und die Klassen regulärer halbeinfacher Matrizen mit dem Komplement der Diskriminantenmenge•die Beispiele $n = 2$ und $n = 3$ •Die Zerlegung jeder Faser von χ in endlich viele Konjugationsklassen mittels der zugehörigen Partitionensysteme•die Ordnungsstruktur der Partitionensysteme und die Adjazenzordnung der Konjugationsklassen in den Fasern von χ

11.7. *Beispiele: $GL(2, \mathbb{R})$ und $GL(3, \mathbb{R})$*

143

1. *Beispiel: $GL(2, \mathbb{R})$*

Ziel der Diskussion: quantitative und qualitative Beschreibung der Orbits von $GL(2, \mathbb{R})$ und $O(2, \mathbb{R})$ auf $M(2 \times 2, \mathbb{R})$, der Fasern von $\chi: M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ und der Endomorphismen von \mathbb{R}^2 •wichtige Untergruppen von $GL(2, \mathbb{R})$ •Bruhat-Zerlegung, Iwasawa-Zerlegung und Cartan-Zerlegung•die Fasern von χ sind Kegel oder Rotationshyperboloide•die vier $GL(2, \mathbb{R})$ -Orbittypen•singuläre Matrizen sind genau die singulären Punkte von χ •Normalformen•die Orbits als homogene Räume•spezielle orthogonale Normalformen•die Geradenscharen auf den einschalen Hyperboloiden und die Eigenraumzerlegung der regulären diagonalisierbaren Matrizen•diskrete und kontinuierliche dynamische Systeme, 1-Parametergruppen•die Exponentialabbildung für Matrizen, Definition und grundlegende Eigenschaften•Untersuchung von $\exp: M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow GL(2, \mathbb{R})$ •Typen von 1-Parametergruppen in $GL(2, \mathbb{R})$ und ihre Operation auf \mathbb{R}^2 •qualitative Sprünge in einem stetigen regulären Schnitt von 1-Parametergruppen

2. Beispiel: $GL(3, \mathbb{R})$	242
Stratifikation von Basis und Fasern der charakteristischen Abbildung $\chi: M(3 \times 3, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$. der subreguläre nilpotente Orbit.	
Beschränkung von χ auf eine transversale Scheibe S .	
explizite Beschreibung von $\chi _S$.	
Die Singularitäten der Fasern von $\chi _S$.	
Beziehungen zu anderen Theorien	
<i>Anhang: Die schwingende Saite</i>	260
Differentialgleichung der schwingenden Saite.	
Eulers Lösung.	
Bernoullis Analyse: Überlagerung synchroner Schwingungen.	
das zugehörige Eigenwertproblem.	
trigonometrische Reihen.	
Fourierentwicklung	
<i>Historische Bemerkungen zur Untersuchung der Struktur linearer Transformationen</i>	273
Implizite Eigenwertprobleme im 18. Jahrhundert.	
Diagonalisierung.	
Jordan-Normalform.	
Elementarteilerttheorie	
<i>Literatur zu § 11</i>	280

VI. Vektorräume mit einer Sesquilinearform

Einleitende Bemerkungen	282
§ 12 Vektorräume mit Hermiteschen Formen und ihre Endomorphismen	
12.1. <i>Sesquilinearformen</i>	283
Bilinearformen.	
Notwendigkeit der Verallgemeinerung, insbesondere Übergang zu Schiefkörpern.	
Quaternionen.	
Definition von Sesquilinearformen.	
Beispiele.	
symmetrische, antisymmetrische und alternierende Bilinearformen.	
quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen.	
ε -hermitesche Formen.	
Beschreibung von Sesquilinearformen durch Matrizen.	
Isometrie von Vektorräumen mit Sesquilinearformen, Kongruenz von Matrizen.	
Beschreibung ε -hermitescher Formen durch Matrizen.	
symmetrische und antisymmetrische, hermitesche und antihermitesche Matrizen.	
adjungierte Matrix	
12.2. <i>Selbstadjungierte und unitäre Endomorphismen</i>	307
Der duale K -Linksmodul V^* zu einem K -Rechtsmodul V .	
transponierte Homomorphismen.	
die kanonischen Homomorphismen $\sigma: V \rightarrow \bar{V}^*$ und $\delta: V \rightarrow \bar{V}^*$ zu einer Sesquilinearform.	
der Rang einer Sesquilinearform.	
für nicht-entartete Sesquilinearformen sind σ und δ Isomorphismen.	
Definition der linksadjungierten und rechtsadjungierten Endomorphismen und ihre Beschreibung durch Matrizen.	
Bildung des adjungierten Endomorphismus als Antiautomorphismus von $\text{End}(V)$.	
hermitesche, antihermitesche und unitäre Endomorphismen.	
die Identifikation von $\text{End}(V)$ und $\text{Sesq}(V)$ bei gegebener nichtentarteter Sesquilinearform.	
hermitesche, antihermitesche, unitäre Matrizen.	

- 12.3. *Orthogonalisierung* 342
 Definition der Orthogonalitätsrelation und des orthogonalen Komplementes. Beispiel: orthogonale Komplemente für eine indefinite Form. Eigenschaften des orthogonalen Komplementes. Orthogonalbasen und Orthonormalbasen. Existenz von Orthogonalbasen. orthogonale Summen-Zerlegung und orthogonale Projektion. Orthogonalisierung nach Gram-Schmidt. Orthogonalisierung und Fourierentwicklung. Hilberträume
- 12.4. *Isotropie* 366
 Isotrope Vektoren und Unterräume. Beispiele. Der Satz von Witt. Kürzungsregel für orthogonale direkte Summen ε -hermitescher Formen. $\text{Aut}(V, b)$ operiert transitiv auf der Menge der maximalen total isotropen Unterräume. Reduktion einer hermiteschen Form. der Witt-Index. Rang und Witt-Index der reellen quadratischen Standardformen. Ursprung des Wortes "isotrop"
- 12.5. *Klassifikation hermitescher und antihermitescher Formen* 395
 ε -hermitesche Formen auf einem 2-dimensionalen Vektorraum mit isotropem Vektor. die hyperbolische Standardebene. Abspalten hyperbolischer Ebenen. Klassifikation der alternierenden Bilinearformen. symplektische Basen. die symplektische Gruppe. $\text{Sp}(1, K) = \text{SL}(2, K)$. Hamiltonsche Gleichungen. die symplektische Gruppe ist die Gruppe der linearen kanonischen Transformationen. symmetrische Bilinearformen auf 1-dimensionalen Vektorräumen, insbesondere für die Körper $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$. die Diskriminante einer nicht entarteten symmetrischen Bilinearform. Klassifikation der symmetrischen Bilinearformen über algebraisch abgeschlossenen Körpern. definite und semidefinite reelle, komplexe und quaternionale hermitesche Formen. Normalformen für hermitesche Formen. maximale positiv definite Unterräume. die Signatur einer hermiteschen Form. die Signatur der Standardformen. Trägheitssatz von Sylvester. Trägheitsindex. Beziehungen zwischen den Invarianten der hermiteschen Formen. Klassifikation hermitescher Formen. die reellen orthogonalen Gruppen $O(p, q, \mathbb{R})$, die komplexen unitären Gruppen $U(p, q, \mathbb{C})$ und die quaternional unitären Gruppen $U(p, q, \mathbb{H})$. die antiunitäre quaternionale Gruppe. Relativitätstheorie, Minkowski-Geometrie, Lorentzgruppe
- 12.6. *Euklidische und unitäre Vektorräume* 442
 Definition der euklidischen und unitären Vektorräume. die Standardräume. Reellifizierung unitärer Vektorräume, Komplexifizierung euklidischer Vektorräume. orthogonale und unitäre Gruppe. Die Iwasawa-Zerlegung. $O(n, \mathbb{R})$ als maximale kompakte Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$. kommutierende Endomorphismen haben einen gemeinsamen Eigenvektor. Charakterisierung normaler, hermitescher, antihermitescher und unitärer Endomorphismen durch ihre Eigenraumzerlegung. konjugierte normale Matrizen sind konjugiert unter $U(n, \mathbb{C})$.

die Gruppe $SO(2, \mathbb{R})$ • Normalformen symmetrischer und orthogonaler Endomorphismen • Weylgruppen vom Typ B_k und D_k • maximale Tori in $SO(n, \mathbb{R})$ • Konjugationsklassen in $O(n, \mathbb{R})$ • die Wurzel aus einer positiv definiten hermiteschen Matrix • die Polarzerlegung • Polarzerlegung und Cartan-Zerlegung • reelle Cartan-Zerlegung und Polarzerlegung • die Zerlegungen der allgemeinen linearen Gruppe und die Algorithmen der linearen Algebra • symmetrische Räume • Gegenüberstellung der verschiedenen Klassifikationsprobleme für Endomorphismen und Sesquilinearformen auf einem Vektorraum mit oder ohne euklidische bzw. unitäre Struktur • Hauptachsentransformation

12.7. Die Klassischen Gruppen

501

Reelle und komplexe Liesche Gruppen • klassische Beispiele • lokale Isomorphie • Lie-Algebra einer Lieschen Gruppe • Lie-Algebren der klassischen Gruppen • lokale Isomorphie ist äquivalent zur Isomorphie der Lie-Algebren • reelle Formen • Beispiele • Zusammenhangskomponente der 1-einfachen Liesche Gruppen • die Klassifikation der einfachen komplexen Lieschen Gruppen • einfache reelle Liesche Gruppen als reelle Formen oder Reellifizierungen komplexer einfacher Liescher Gruppen • Klassifikation der einfachen reellen Lieschen Gruppen • kompakte und anti-kompakte reelle Formen

Bemerkungen zur Geschichte der Geometrie der klassischen Gruppen

514

Euklidische Geometrie und orthogonale Gruppe • symmetrische Bilinearformen, verallgemeinerte orthogonale Gruppen • Hermitesche Formen, unitäre Geometrie • schiefssymmetrische Formen, symplektische Geometrie • die klassischen Gruppen als Liegruppen

Literatur zu § 12

520

Quellenverzeichnis der Abbildungen

522

Stichwortverzeichnis

523