

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	3
Notationen .....	12
1. Einleitung .....	15
1.1 Historische Bemerkungen zu Iterationsverfahren .....	15
1.2 Das Modellproblem (Poisson-Gleichung) .....	15
1.3 Aufwand für direkte Lösung des Gleichungssystems .....	19
1.4 Beispiele für iterative Verfahren .....	21
2. Grundlagen aus der Linearen Algebra .....	25
2.1 Bezeichnungen für Vektoren und Matrizen .....	25
2.1.1 Nichttangeordnete Indexmengen .....	25
2.1.2 Bezeichnungen und Notationen .....	26
2.1.3 Sternnotation .....	27
2.2 Lineare Gleichungssysteme .....	28
2.3 Permutationsmatrizen .....	29
2.4 Eigenwerte und Eigenvektoren .....	30
2.5 Blockvektoren, Blockmatrizen .....	33
2.6 Normen .....	35
2.6.1 Vektornormen .....	35
2.6.2 Äquivalenz aller Normen .....	36
2.6.3 Zugeordnete Matrixnormen .....	37
2.7 Skalarprodukt .....	38
2.8 Normalformen .....	40
2.8.1 Schur-Normalform .....	40
2.8.2 Jordan-Normalform .....	41
2.8.3 Diagonalisierbarkeit .....	43
2.9 Zusammenhang zwischen Normen und Spektralradius .....	45
2.9.1 Zugeordnete Matrixnormen als obere Eigenwertschranken ..	45
2.9.2 Die Spektralnorm .....	45
2.9.3 Die Spektralnorm approximierende Matrixnormen .....	46
2.9.4 Die geometrische Reihe (Neumannsche Reihe) für Matrizen ..	48
2.9.5 Der numerische Radius einer Matrix .....	48
2.10 Positiv definite Matrizen .....	49
2.10.1 Definition und Bezeichnungen .....	49
2.10.2 Rechenregeln und Kriterien für positiv definite Matrizen ..	50
2.10.3 Folgerungen für positiv definite Matrizen .....	51
3. Allgemeines zu iterativen Verfahren .....	54
3.1 Allgemeine Aussagen zur Konvergenz .....	54
3.1.1 Bezeichnungen .....	54
3.1.2 Fixpunkte .....	54
3.1.3 Konsistenz .....	55
3.1.4 Konvergenz .....	55
3.1.5 Konvergenz und Konsistenz .....	55

3.2 Lineare Iterationsverfahren .....	56
3.2.1 Bezeichnungen, erste Normalform .....	56
3.2.2 Konsistenz, zweite und dritte Normalform .....	57
3.2.3 Darstellung der Iterierten $x^m$ .....	58
3.2.4 Konvergenz .....	59
3.2.5 Konvergenzgeschwindigkeit .....	60
3.2.6 Bemerkungen zu den Normalformmatrizen $M$ , $N$ und $W$ .....	63
3.2.7 Produktiterationen .....	63
3.2.8 Drei-Term-Rekursionen (Zweischrittiterationen) .....	64
3.3 Effektivität von Iterationsverfahren .....	64
3.3.1 Rechenaufwand .....	64
3.3.2 Effektivität .....	65
3.3.3 Ordnung der linearen Konvergenz .....	66
3.4 Test iterativer Verfahren .....	67
3.5 Erläuterungen zu den Pascal-Prozeduren .....	68
3.5.1 Zu Pascal .....	68
3.5.2 Zu den Testbeispielen .....	69
3.5.3 Konstanten und Typen .....	70
3.5.4 Format der Iterationsprozeduren .....	71
3.5.5 Testumgebung .....	72
4. Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren im positiv definiten Fall .....	74
4.1 Eigenwertanalyse des Modellproblem .....	74
4.2 Konstruktion der Iterationsverfahren .....	76
4.2.1 Jacobi-Iteration .....	76
4.2.2 Gauß-Seidel-Verfahren .....	78
4.3 Gedämpfte bzw. extrapolierte Iterationsverfahren .....	81
4.3.1 Gedämpftes Jacobi-Verfahren .....	81
4.3.2 Richardson-Iteration .....	83
4.3.3 SOR-Verfahren .....	85
4.4 Konvergenzuntersuchung .....	88
4.4.1 Richardson-Iteration .....	88
4.4.2 Jacobi-Iteration .....	93
4.4.3 Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren .....	96
4.5 Blockversionen .....	102
4.5.1 Block-Jacobi-Verfahren .....	102
4.5.2 Block-Gauß-Seidel- und Block-SOR-Verfahren .....	104
4.5.3 Konvergenz der Blockvarianten .....	107
4.6 Aufwand der Verfahren .....	108
4.6.1 Der Fall allgemeiner, schwachbesetzter Matrizen .....	108
4.6.2 Aufwand im Modellfall .....	109
4.7 Konvergenzraten im Falle des Modellproblems .....	110
4.7.1 Richardson- und Jacobi-Iteration .....	110
4.7.2 Block-Jacobi-Iteration .....	111
4.7.3 Numerische Beispiele zu den Jacobi-Varianten .....	112
4.7.4 SOR- und Block-SOR-Iteration mit numerischen Beispielen .....	113

4.8 Symmetrische Verfahren .....	115
4.8.1 Allgemeine Form der symmetrischen Iteration .....	115
4.8.2 Konvergenz .....	115
4.8.3 Symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren .....	116
4.8.4 Adjungierte und zugehörige symmetrische Iterationen .....	117
4.8.5 SSOR: Symmetrisches SOR .....	119
4.8.6 Pascal-Prozeduren und numerische Resultate zum SSOR- Verfahren .....	121
5. Analyse im 2-zyklischen Fall .....	123
5.1 Die 2-zyklischen Matrizen .....	123
5.2 Vorbereitende Lemmata .....	126
5.3 Analyse der Richardson-Iteration .....	127
5.4 Analyse des Jacobi-Verfahrens .....	129
5.5 Analyse der Gauß-Seidel-Iteration .....	130
5.6 Analyse des SOR-Verfahrens .....	132
5.6.1 Konsistent geordnete Matrizen .....	132
5.6.2 Satz von Young .....	134
5.6.3 Ordnungsverbesserung durch SOR .....	136
5.6.4 Praktische Handhabung des SOR-Verfahrens .....	137
5.7 Anwendung auf das Modellproblem .....	138
5.7.1 Analyse im Modellfall .....	138
5.7.2 Gauß-Seidel-Iteration: numerische Beispiele .....	139
5.7.3 SOR-Iteration: numerische Beispiele .....	140
5.8 Ergänzungen .....	141
5.8.1 $p$ -zyklische Matrizen .....	141
5.8.2 Modifiziertes SOR .....	141
5.8.3 SSOR im 2-zyklischen Fall .....	142
5.8.4 Unsymmetrisches SOR-Verfahren .....	142
6. Analyse für M-Matrizen .....	143
6.1 Positive Matrizen .....	143
6.2 Graph einer Matrix und irreduzible Matrizen .....	144
6.3 Perron-Frobenius-Theorie positiver Matrizen .....	147
6.4 M-Matrizen .....	150
6.4.1 Definition .....	150
6.4.2 Zusammenhang: M-Matrizen und der Jacobi-Iteration .....	151
6.4.3 Diagonaldominanz .....	152
6.4.4 Weitere Kriterien .....	154
6.5 Reguläre Aufspaltungen .....	157
6.6 Anwendungen .....	159
7. Semiiterative Verfahren .....	162
7.1 Erste Formulierung .....	162
7.1.1 Allgemeines .....	162
7.1.2 Konsistenz, asymptotische Konvergenzrate .....	162
7.1.3 Fehlerdarstellung .....	163

7.2 Zweite Formulierung semiiterativer Verfahren .....	164
7.2.1 Allgemeine Darstellung .....	164
7.2.2 Pascal-Realisierung der zweiten Formulierung .....	166
7.2.3 Dreitermrekursion .....	166
7.3 Optimale Polynome .....	167
7.3.1 Aufgabenstellung .....	167
7.3.2 Diskussion der 2. Minimierungsaufgabe .....	167
7.3.3 Čebyšev-Polynome .....	170
7.3.4 Die Cebysev-Methode (Lösung der 3. Minimierungsaufgabe) .....	170
7.3.5 Verbesserung der Konvergenzordnung durch die Čebyšev-Methode .....	174
7.3.6 Optimierung über andere Mengen .....	175
7.3.7 Die zyklische Iteration .....	176
7.3.8 Eine Umformulierung .....	176
7.3.9 Mehrschrittiterationen .....	178
7.3.10 Pascal-Prozeduren .....	178
7.3.11 Aufwand der semiiterativen Methode .....	181
7.4 Anwendung auf bekannte Iterationen .....	182
7.4.1 Vorbemerkungen .....	182
7.4.2 Das semiiterative Richardson-Verfahren .....	183
7.4.3 Das semiiterative Jacobi- und Block-Jacobi-Verfahren .....	184
7.4.4 Das semiiterative SSOR- und Block-SSOR-Verfahren .....	185
7.5 Verfahren der alternierenden Richtungen (ADI) .....	188
7.5.1 Erklärung am Modellproblem .....	188
7.5.2 Allgemeine Darstellung .....	189
7.5.3 ADI im kommutativen Fall .....	191
7.5.4 Die ADI-Methode und semiiterative Verfahren .....	194
7.5.5 Pascal-Prozeduren .....	195
7.5.6 Aufwandsüberlegungen und numerische Beispiele .....	196
8. Transformationen, sekundäre Iterationen, unvollständige Dreieckszerlegungen .....	198
8.1 Erzeugung von Iterationen durch Transformationen .....	198
8.1.1 Bisherige Techniken zur Iterationserzeugung .....	198
8.1.2 Die Linkstransformation .....	198
8.1.3 Die Rechtstransformation .....	201
8.1.4 Die beidseitige Transformation .....	202
8.2 Die Kaczmarz-Iteration .....	203
8.2.1 Ursprüngliche Formulierung .....	203
8.2.2 Interpretation als Gauß-Seidel-Verfahren .....	203
8.2.3 Pascal-Prozeduren und numerische Beispiele .....	204
8.3 Präkonditionierung .....	205
8.3.1 Zur Begriffsbildung .....	205
8.3.2 Beispiele .....	206
8.3.3 Rechenregeln für Konditionszahlen .....	208
8.4 Sekundäre Iterationen .....	209
8.4.1 Beispiele für sekundäre Iterationen .....	209
8.4.2 Konvergenzanalyse im allgemeinen Fall .....	212

8.4.3 Analyse im symmetrischen Fall .....	214
8.4.4 Abschätzung des Aufwandes .....	216
8.4.5 Pascal-Prozeduren .....	217
8.4.6 Numerische Beispiele .....	218
8.5 Unvollständige Dreieckszerlegungen .....	219
8.5.1 Einführung, ILU-Iteration .....	219
8.5.2 Unvollständige Zerlegung bezüglich eines Sternmusters .....	222
8.5.3 Anwendung auf allgemeine Fünfpunktformeln .....	222
8.5.4 Modifizierte ILU-Zerlegungen .....	224
8.5.5 Zur Existenz und Stabilität der ILU-Zerlegung .....	225
8.5.6 Eigenschaften der ILU-Zerlegung .....	228
8.5.7 ILU-Zerlegung zu anderen Mustern .....	230
8.5.8 Approximative ILU-Zerlegungen .....	231
8.5.9 Blockweise ILU-Zerlegungen .....	232
8.5.10 Pascal-Prozeduren .....	233
8.5.11 Numerische Beispiele .....	234
8.5.12 Anmerkungen .....	235
9. Verfahren der konjugierten Gradienten .....	236
9.1 Lineare Gleichungssysteme als Minimierungsaufgabe .....	236
9.1.1 Minimierungsaufgabe .....	236
9.1.2 Suchrichtungen .....	236
9.1.3 Andere quadratische Funktionale .....	237
9.1.4 Der komplexe Fall .....	238
9.2 Gradientenverfahren .....	239
9.2.1 Konstruktion .....	239
9.2.2 Eigenschaften des Gradientenverfahrens .....	239
9.2.3 Numerische Beispiele .....	241
9.2.4 Gradientenverfahren basierend auf anderen Iterationen .....	242
9.2.5 Pascal-Prozeduren und numerische Beispiele .....	245
9.3 Methode der konjugierten Richtungen .....	248
9.3.1 Optimalität bezüglich einer Richtung .....	248
9.3.2 Konjugierte Richtungen .....	249
9.4 Methode der konjugierten Gradienten .....	251
9.4.1 Erste Formulierung .....	251
9.4.2 Das cg-Verfahren (angewandt auf die Richardson-Iteration) .....	254
9.4.3 Konvergenzanalyse .....	255
9.4.4 Die cg-Methode angewandt auf symmetrische Iterationen .....	258
9.4.5 Pascal-Prozeduren .....	260
9.4.6 Numerische Beispiele im Modellfall .....	261
9.4.7 Aufwand der cg-Methode .....	262
9.4.8 Eignung für sekundäre Iterationen .....	263
9.5 Verallgemeinerungen .....	264
9.5.1 Formulierung des cg-Verfahrens mit allgemeinerer Bilinearform .....	264
9.5.2 Das Verfahren der konjugierten Residuen .....	266
9.5.3 Dreitermrekursion für $p^m$ .....	268
9.5.4 Stabilisiertes Verfahren der konjugierten Residuen .....	269

9.5.5 Konvergenzresultate für indefinite Matrizen $A$	270
9.5.6 Pascal-Prozeduren	272
9.5.7 Numerische Beispiele	273
9.5.8 Das Verfahren der orthogonalen Richtungen	274
9.5.9 Lösung unsymmetrischer Systeme	276
9.5.10 Weitere Anmerkungen	277
10. Mehrgitterverfahren	278
10.1 Einführung	278
10.1.1 Glättung	278
10.1.2 Hierarchie der Gleichungssysteme	280
10.1.3 Prolongation	281
10.1.4 Restriktion	282
10.1.5 Grobgitterkorrektur	283
10.2 Das Zweigitterverfahren	285
10.2.1 Algorithmus	285
10.2.2 Modifikationen	285
10.2.3 Iterationsmatrix	285
10.2.4 Pascal-Prozeduren	286
10.2.5 Numerische Beispiele	290
10.3 Analyse für ein eindimensionales Beispiel	291
10.3.1 Fourier-Analyse	291
10.3.2 Transformierte Größen	293
10.3.3 Konvergenzresultate	294
10.4 Mehrgitteriteration	295
10.4.1 Algorithmus	295
10.4.2 Pascal-Prozeduren	297
10.4.3 Numerische Resultate	300
10.4.4 Rechenaufwand	302
10.4.5 Iterationsmatrix	304
10.5 Geschachtelte Iteration	305
10.5.1 Algorithmus	305
10.5.2 Genauigkeitsanalyse	305
10.5.3 Rechenaufwand	307
10.5.4 Pascal-Prozeduren	308
10.5.5 Numerische Resultate	311
10.5.6 Anmerkungen	311
10.6 Konvergenzanalyse	312
10.6.1 Übersicht	312
10.6.2 Glättungseigenschaft	312
10.6.3 Approximationseigenschaft	315
10.6.4 Konvergenz der Zweigitteriteration	320
10.6.5 Konvergenz der Mehrgitteriteration	321
10.6.6 Der schwächer reguläre Fall	323
10.7 Symmetrische Mehrgitterverfahren	324
10.7.1 Der symmetrische Mehrgitteralgorithmus	324
10.7.2 Zweigitterkonvergenzaussagen für $\nu_1 > 0$ , $\nu_2 > 0$	325

10.7.3 Glättungseigenschaft im symmetrischen Fall .....	326
10.7.4 Verschärfte Zweigitterkonvergenzaussagen .....	327
10.7.5 V-Zykluskonvergenz .....	329
10.7.6 Mehrgitterkonvergenz für alle $\nu > 0$ .....	330
10.7.7 Konvergenz ohne Regularität .....	331
10.8 Kombination von Mehrgitter- mit semiiterativen Verfahren ..	332
10.8.1 Semiiterative Glätter .....	332
10.8.2 Gedämpfte Grobgitterkorrekturen .....	334
10.8.3 Mehrgitteriteration als Basis des cg-Verfahrens .....	334
10.9 Anmerkungen .....	335
10.9.1 Mehrgitterverfahren zweiter Art .....	335
10.9.2 Zur Geschichte der Mehrgitterverfahren .....	335
10.9.3 Robuste Methoden .....	336
10.9.4 Filternde Zerlegungen .....	337
✓ 11. Gebietszerlegungsmethoden .....	339
11.1 Allgemeines .....	339
11.2 Formulierung der Gebietszerlegungsmethode .....	340
11.2.1 Allgemeine Konstruktion .....	340
11.2.2 Zu den Prolongationen .....	341
11.2.3 Multiplikative und additive Schwarz-Iteration .....	342
11.2.4 Interpretation als Gauß-Seidel- bzw. Jacobi-Iteration ....	343
11.2.5 Die klassische Schwarz-Iteration .....	344
11.2.6 Verschärfte Abschätzung $A \leq I'W$ .....	344
11.3 Eigenschaften der additiven Schwarz-Iteration .....	345
11.3.1 Parallelität .....	345
11.3.2 Konditionsabschätzungen .....	346
11.3.3 Konvergenzaussagen .....	347
11.3.4 Genäherte Lösung der Teilprobleme .....	348
11.4 Beispiele .....	349
11.4.1 Schwarz-Verfahren mit echter Gebietszerlegung .....	349
11.4.2 Additive Schwarz-Iteration mit Grobgitterkorrektur .....	350
11.4.3 Formulierung im Fall einer Galerkin-Diskretisierung .....	351
11.4.4 Mehrgitterverfahren als Schwarz-Iteration .....	352
11.4.5 Mehrstufige Schwarz-Iteration .....	354
11.4.6 Methode der hierarchischen Basis .....	354
11.4.7 Weitere Ansätze für Zerlegungen in Unterräume .....	356
11.5 Schur-Komplement-Methoden .....	356
11.5.1 Nichtüberlappende Gebietszerlegung mit innerem Rand ...	356
11.5.2 Direkte Lösung .....	357
11.5.3 Die Kapazitätsmatrixmethode .....	357
11.5.4 Gebietszerlegung mit nichtüberlappenden Gebieten .....	358
11.5.5 Mehrgitterähnliche Gebietszerlegungsmethoden .....	359
11.5.6 Weitere Anmerkungen .....	359
Literaturverzeichnis .....	360
Stichwortverzeichnis .....	375
Verzeichnis der Pascal-Namen .....	380