

# Inhalt

<b>Vorwort</b>	<b>13</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>15</b>
<hr/> <b>I. Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<hr/> <b>19</b>
<b>2. Punkttransformationen und ihre Erzeugenden</b>	<b>21</b>
2.1 Einparametrische Gruppen von Punkttransformationen und ihre infinitesimalen Erzeugenden	21
2.2 Transformationsgesetze und Normalformen von Erzeugenden	25
2.3 Die Erweiterung von Transformationen und ihrer Erzeugenden	28
2.4 Transformationsgruppen mit mehreren Parametern und ihre Erzeugenden	31
2.5 Aufgaben	33
<b>3. Lie-Punkt-Symmetrien gewöhnlicher Differential- gleichungen: Definitionen und Eigenschaften</b>	<b>35</b>
3.1 Die Definition einer Symmetrie: erste Formulierung	35
3.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen und lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung	39
3.3 Die Definition einer Symmetrie: zweite Formulierung	42

3.4	Zusammenfassung	44
3.5	Aufgaben	45
<b>4.</b>	<b>Die Bestimmung der Lie-Punkt-Symmetrien einer gewöhnlichen Differentialgleichung</b>	<b>46</b>
4.1	Bemerkungen zum allgemeinen Vorgehen	46
4.2	Der atypische Fall: die Differentialgleichungen erster Ordnung	47
4.3	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	49
4.4	Differentialgleichungen höherer Ordnung. Die allgemeine lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung	54
4.5	Aufgaben	57
<b>5.</b>	<b>Wie benutzt man Lie-Punkt-Symmetrien: Differentialgleichungen mit einer Symmetrie</b>	<b>59</b>
5.1	Differentialgleichungen erster Ordnung	59
5.2	Differentialgleichungen höherer Ordnung	62
5.3	Aufgaben	68
<b>6.</b>	<b>Einige grundlegende Eigenschaften von Lie-Algebren</b>	<b>69</b>
6.1	Die Erzeugenden einer mehrparametrischen Gruppe und ihre Lie-Algebren	69
6.2	Beispiele von Lie-Algebren	72
6.3	Untergruppen und Unterhalbgebren	75
6.4	Realisierungen von Lie-Algebren. Invarianten und Differentialinvarianten	77
6.5	Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung mit mehrparametrischen Symmetriegruppen: ein Ausblick	82
6.6	Aufgaben	83
<b>7.</b>	<b>Wie benutzt man Lie-Punkt-Symmetrien: Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einer <math>G_2</math></b>	<b>85</b>
7.1	Klassifizierung der auftretenden Fälle und mögliche Integrationsstrategien	85
7.2	Erste Integrationsstrategie: Normalformen der Erzeugenden im Raum der Variablen	88
7.3	Zweite Integrationsstrategie: Normalform der Erzeugenden im Raum der ersten Integrale	93
7.4	Zusammenfassung: Rezept für die Integration von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die eine Gruppe $G_2$ gestatten	97
7.5	Beispiele	98
7.6	Aufgaben	102

<b>8.</b>	<b>Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit mehr als zwei Lie-Punkt-Symmetrien</b>	<b>104</b>
8.1	Das Problem: Gruppen die keine $G_2$ enthalten	104
8.2	Wie löst man eine Differentialgleichung mit einer $G_3$ IX?	105
8.3	Beispiel	107
8.4	Aufgaben	108
<b>9.</b>	<b>Differentialgleichungen höherer Ordnung mit mehr als einer Lie-Punkt-Symmetrie</b>	<b>110</b>
9.1	Einige allgemeine Bemerkungen zur Aufgabenstellung	110
9.2	Erste Integrationsstrategie: Normalformen der Erzeugenden im Raum der Variablen	111
9.3	Zweite Integrationsstrategie: Normalform der Erzeugenden im Raum der ersten Integrale	114
9.4	Dritte Integrationsstrategie: Differentialinvarianten	118
9.5	Beispiele	120
9.6	Aufgaben	125
<b>10.</b>	<b>Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung</b>	<b>126</b>
10.1	Die Formulierung als lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung und die Symmetriebedingungen	126
10.2	Beispiel: das Keplerproblem	130
10.3	Systeme mit einer Lagrangefunktion: Symmetrien und Erhaltungssätze	131
10.4	Aufgaben	134
<b>11.</b>	<b>Symmetrien allgemeiner als Lie-Punkt-Symmetrien</b>	<b>136</b>
11.1	Warum sollte man Punkttransformationen und Punktsymmetrien verallgemeinern?	136
11.2	Wie verallgemeinert man Punkttransformationen und Punktsymmetrien?	139
11.3	Berührungstransformationen	140
11.4	Wie findet und benutzt man Berührungssymmetrien einer gewöhnlichen Differentialgleichung?	143
11.5	Aufgaben	146
<b>12.</b>	<b>Dynamische Symmetrien: die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften</b>	<b>147</b>
12.1	Was ist eine dynamische Symmetrie?	147
12.2	Beispiele dynamischer Symmetrien	149

12.3	Die Struktur der Menge der dynamischen Symmetrien	151
12.4	Aufgaben	153
<b>13.</b>	<b>Wie findet und nutzt man dynamische Symmetrien für Systeme mit einer Lagrange-funktion?</b>	<b>155</b>
13.1	Dynamische Symmetrien und Erhaltungssätze	155
13.2	Beispiel: $L = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - a(2y^3 + x^2y)$ , $a \neq 0$	157
13.3	Beispiel: das Keplerproblem	160
13.4	Beispiel: Die Geodäten eines Riemannschen Raumes – Killingvektoren und Killingtensoren	162
13.5	Aufgaben	167
<b>14.</b>	<b>Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung mit einem Fundamentalsystem von Lösungen</b>	<b>168</b>
14.1	Die Aufgabenstellung	168
14.2	Die Antwort	169
14.3	Beispiele	172
14.4	Systeme mit einem Fundamentalsystem von Lösungen und lineare Systeme	175
14.5	Aufgaben	178
<b>II.</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>179</b>
<b>15.</b>	<b>Lie-Punkt-Transformationen und -Symmetrien</b>	<b>181</b>
15.1	Einführung	181
15.2	Punkttransformationen und ihre Erzeugenden	182
15.3	Die Definition einer Symmetrie	186
15.4	Aufgaben	188
<b>16.</b>	<b>Wie bestimmt man Punktsymmetrien partieller Differentialgleichungen?</b>	<b>189</b>
16.1	Differentialgleichungen erster Ordnung	189
16.2	Differentialgleichungen zweiter Ordnung	196
16.3	Aufgaben	203
<b>17.</b>	<b>Wie benutzt man Lie-Punkt-Symmetrien partieller Differentialgleichungen I: Erzeugung von Lösungen durch Symmetrietransformationen</b>	<b>204</b>
17.1	Die Struktur der Menge der Erzeugenden	206
17.2	Was können wir von den Symmetrietransformationen erwarten?	206

17.3	Die Erzeugung von Lösungen durch endliche Symmetrietransformationen	207
17.4	Die Erzeugung von Lösungen (linearer Differentialgleichungen) durch Anwendung der Erzeugenden	211
17.5	Aufgaben	213
<b>18.</b>	<b>Wie benutzt man Lie-Punkt-Symmetrien partieller Differentialgleichungen II: Ähnlichkeitsvariable und Reduktion der Zahl der Veränderlichen</b>	<b>214</b>
18.1	Das Problem	214
18.2	Ähnlichkeitsvariable und wie man sie findet	215
18.3	Beispiele	219
18.4	Bedingte Symmetrien	225
18.5	Aufgaben	228
<b>19.</b>	<b>Wie benutzt man Lie-Punkt-Symmetrien partieller Differentialgleichungen III: mehrfache Variablenreduktion und Differentialinvarianten</b>	<b>229</b>
19.1	Mehrfache Reduktion der Variablenzahl Schritt für Schritt	229
19.2	Mehrfache Reduktion der Variablenzahl unter Verwendung von Invarianten	234
19.3	Einige Bemerkungen zu gruppeninvarianten Lösungen und ihrer Klassifizierung	237
19.4	Aufgaben	238
<b>20.</b>	<b>Symmetrien und Separabilität partieller Differentialgleichungen</b>	<b>239</b>
20.1	Die Aufgabenstellung	239
20.2	Einige Bemerkungen zur üblichen Separation der Wellengleichung	241
20.3	Die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen und erste Integrale in Involution	242
20.4	Quadratische erste Integrale in Involution und die Separabilität der Wellengleichung und der Hamilton-Jacobi-Gleichung	246
20.5	Aufgaben	248
<b>21.</b>	<b>Berührungstransformationen und Berührungssymmetrien partieller Differentialgleichungen</b>	<b>249</b>
21.1	Die allgemeine Berührungstransformation und ihre infinitesimale Erzeugende	249
21.2	Berührungssymmetrien partieller Differentialgleichungen und ihre Bestimmung	252

21.3	Einige Bemerkungen zur Reduktion der Variablenzahl mit Hilfe von Berührungssymmetrien	254
21.4	Aufgaben	256
<b>22.</b>	<b>Differentialgleichungen und Symmetrien in der Sprache der Formen</b>	<b>258</b>
22.1	Vektoren und Formen	258
22.2	Äußere Ableitung und Lie-Ableitung	261
22.3	Differentialgleichungen in der Sprache der Formen	263
22.4	Symmetrien von Differentialgleichungen in der Sprache der Formen	266
22.5	Aufgaben	271
<b>23.</b>	<b>Lie-Bäcklund-Transformationen</b>	<b>272</b>
23.1	Warum sollte man allgemeinere Transformationen und Symmetrien untersuchen?	272
23.2	Verallgemeinerungen endlicher Ordnung gibt es nicht	276
23.3	Lie-Bäcklund-Transformationen und ihre infinitesimalen Erzeugenden	278
23.4	Beispiele von Lie-Bäcklund-Transformationen	280
23.5	Lie-Bäcklund- und Bäcklundtransformationen	282
23.6	Aufgaben	284
<b>24.</b>	<b>Lie-Bäcklund-Symmetrien und ihre Bestimmung</b>	<b>285</b>
24.1	Die grundlegenden Definitionen	285
24.2	Bemerkungen zur Struktur der Menge der Lie-Bäcklund- Symmetrien	287
24.3	Wie findet man Lie-Bäcklund-Symmetrien: einige allgemeine Bemerkungen	289
24.4	Beispiele von Lie-Bäcklund-Symmetrien	291
24.5	Rekursionsoperatoren	296
24.6	Aufgaben	299
<b>25.</b>	<b>Wie benutzt man Lie-Bäcklund-Symmetrien?</b>	<b>301</b>
25.1	Die Erzeugung von Lösungen durch endliche Symmetrie- transformationen	301
25.2	Ähnlichkeitslösungen von Lie-Bäcklund-Symmetrien	303
25.3	Lie-Bäcklund-Symmetrien und Erhaltungssätze	305
25.4	Lie-Bäcklund-Symmetrien und Erzeugungsmethoden	307
25.5	Aufgaben	308

<b>Literatur</b>	<b>310</b>
Hinweise zu einzelnen Kapiteln	310
Weiterführende Literatur	313
<b>Lösungen einiger etwas schwierigerer Aufgaben</b>	<b>314</b>
<b>Sachwortregister</b>	<b>318</b>