

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|----|
| I Allgemeine Grundlagen | 1 |
| 1 Einige grundlegende Begriffe über Mengen | 1 |
| 1.1 Definition und Darstellung einer Menge | 1 |
| 1.2 Mengenoperationen | 3 |
| 2 Die Menge der reellen Zahlen | 6 |
| 2.1 Darstellung der reellen Zahlen und ihrer Eigenschaften | 6 |
| 2.2 Anordnung der Zahlen, Ungleichung, Betrag | 7 |
| 2.3 Teilmengen und Intervalle | 8 |
| 3 Gleichungen | 9 |
| 3.1 Lineare Gleichungen | 10 |
| 3.2 Quadratische Gleichungen | 10 |
| 3.3 Gleichungen 3. und höheren Grades | 11 |
| 3.3.1 Allgemeine Vorbetrachtung | 11 |
| 3.3.2 Kubische Gleichungen vom speziellen Typ $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ | 12 |
| 3.3.3 Bi-quadratische Gleichungen | 12 |
| 3.4 Wurzelgleichungen | 13 |
| 3.5 Betragsgleichungen | 14 |
| 3.5.1 Definition der Betragsfunktion | 15 |
| 3.5.2 Analytische Lösung einer Betragsgleichung durch Fallunterscheidung (Beispiel) | 17 |
| 3.5.3 Lösung einer Betragsgleichung auf halb-graphischem Wege (Beispiel) | 18 |
| 4 Ungleichungen | 18 |
| 5 Lineare Gleichungssysteme | 21 |
| 5.1 Ein einführendes Beispiel | 21 |
| 5.2 Der Gaußsche Algorithmus | 24 |
| 5.3 Ein Anwendungsbeispiel: Berechnung eines elektrischen Netzwerkes | 33 |
| 6 Der Binomische Lehrsatz | 35 |

| | |
|--|--------|
| Übungsaufgaben | 39 |
| Zu Abschnitt 1 und 2 | 39 |
| Zu Abschnitt 3 | 39 |
| Zu Abschnitt 4 | 40 |
| Zu Abschnitt 5 | 41 |
| Zu Abschnitt 6 | 42 |
| II Vektoralgebra | 43 |
| 1 Grundbegriffe | 43 |
| 1.1 Definition eines Vektors | 43 |
| 1.2 Gleichheit von Vektoren | 44 |
| 1.3 Parallele, anti-parallele und kollineare Vektoren | 45 |
| 1.4 Vektoroperationen | 46 |
| 1.4.1 Addition von Vektoren | 46 |
| 1.4.2 Subtraktion von Vektoren | 49 |
| 1.4.3 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar | 50 |
| 2 Vektorrechnung in der Ebene | 52 |
| 2.1 Komponentendarstellung eines Vektors | 52 |
| 2.2 Darstellung der Vektoroperationen | 56 |
| 2.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar | 56 |
| 2.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren | 57 |
| 2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren | 59 |
| 2.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes | 59 |
| 2.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren | 62 |
| 2.4 Ein Anwendungsbeispiel: Resultierende eines ebenen Kräftesystems | 65 |
| 3 Vektorrechnung im 3-dimensionalen Raum | 67 |
| 3.1 Komponentendarstellung eines Vektors | 68 |
| 3.2 Darstellung der Vektoroperationen | 72 |
| 3.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar | 72 |
| 3.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren | 73 |
| 3.3 Skalarprodukt zweier Vektoren | 76 |
| 3.3.1 Definition und Berechnung eines Skalarproduktes | 76 |
| 3.3.2 Winkel zwischen zwei Vektoren | 79 |
| 3.3.3 Richtungswinkel eines Vektors | 80 |
| 3.3.4 Projektion eines Vektors auf einen zweiten Vektor | 82 |
| 3.3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Arbeit einer Kraft | 84 |
| 3.4 Vektorprodukt zweier Vektoren | 86 |
| 3.4.1 Definition und Berechnung eines Vektorproduktes | 86 |
| 3.4.2 Anwendungsbeispiele | 92 |

| | |
|--|-----|
| 3.4.2.1 Drehmoment (Moment einer Kraft) | 92 |
| 3.4.2.2 Bewegung von Ladungsträgern in einem Magnetfeld (Lorentz-Kraft) | 93 |
| 3.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt) | 94 |
| 4 Anwendungen in der Geometrie | 98 |
| 4.1 Vektorielle Darstellung einer Geraden | 98 |
| 4.1.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden | 98 |
| 4.1.2 Zwei-Punkte-Form einer Geraden | 100 |
| 4.1.3 Abstand eines Punktes von einer Geraden | 101 |
| 4.1.4 Abstand zweier paralleler Geraden | 103 |
| 4.1.5 Abstand zweier windschiefer Geraden | 105 |
| 4.1.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden | 107 |
| 4.2 Vektorielle Darstellung einer Ebene | 109 |
| 4.2.1 Punkt-Richtungs-Form einer Ebene | 109 |
| 4.2.2 Drei-Punkte-Form einer Ebene | 112 |
| 4.2.3 Gleichung einer Ebene senkrecht zu einem Vektor | 114 |
| 4.2.4 Abstand eines Punktes von einer Ebene | 115 |
| 4.2.5 Abstand einer Geraden von einer Ebene | 117 |
| 4.2.6 Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Geraden mit einer Ebene | 119 |
| 4.2.7 Abstand zweier paralleler Ebenen | 122 |
| 4.2.8 Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen | 124 |
| Übungsaufgaben | 128 |
| Zu Abschnitt 2 und 3 | 128 |
| Zu Abschnitt 4 | 132 |
| III Funktionen und Kurven | 137 |
| 1 Definition und Darstellung einer Funktion | 137 |
| 1.1 Definition einer Funktion | 137 |
| 1.2 Darstellungsformen einer Funktion | 138 |
| 1.2.1 Analytische Darstellung | 138 |
| 1.2.2 Darstellung durch eine Wertetabelle (Funktionstafel) | 138 |
| 1.2.3 Graphische Darstellung | 138 |
| 1.2.4 Parameterdarstellung einer Funktion | 140 |
| 2 Allgemeine Funktionseigenschaften | 141 |
| 2.1 Nullstellen | 141 |
| 2.2 Symmetrieverhalten | 142 |
| 2.3 Monotonie | 144 |
| 2.4 Periodizität | 147 |
| 2.5 Umkehrfunktion oder inverse Funktion | 148 |

| | |
|--|-----|
| 3 Koordinatentransformationen | 152 |
| 3.1 Ein einführendes Beispiel | 152 |
| 3.2 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems | 153 |
| 3.3 Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten | 158 |
| 3.3.1 Definition der Polarkoordinaten | 158 |
| 3.3.2 Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten | 161 |
| 4 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion | 163 |
| 4.1 Reelle Zahlenfolgen | 163 |
| 4.1.1 Definition und Darstellung einer reellen Zahlenfolge | 163 |
| 4.1.2 Grenzwert einer Folge | 165 |
| 4.2 Grenzwert einer Funktion | 168 |
| 4.2.1 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow x_0$ | 168 |
| 4.2.2 Grenzwert einer Funktion für $x \rightarrow \pm \infty$ | 171 |
| 4.2.3 Rechenregeln für Grenzwerte | 173 |
| 4.3 Stetigkeit einer Funktion | 174 |
| 5 Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) | 179 |
| 5.1 Definition einer ganzrationalen Funktion | 179 |
| 5.2 Konstante und lineare Funktionen | 180 |
| 5.3 Quadratische Funktionen | 183 |
| 5.4 Polynomfunktionen höheren Grades | 187 |
| 5.5 Horner-Schema und Nullstellenberechnung einer Polynomfunktion | 191 |
| 5.6 Interpolationspolynome | 195 |
| 5.6.1 Allgemeine Vorbetrachtung | 195 |
| 5.6.2 Interpolationspolynom von Newton | 196 |
| 5.7 Ein Anwendungsbeispiel: Biegelinie eines Balkens | 200 |
| 6 Gebrochenrationale Funktionen | 200 |
| 6.1 Definition einer gebrochenrationalen Funktion | 200 |
| 6.2 Nullstellen, Definitionslücken, Pole | 201 |
| 6.3 Asymptotisches Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion im Unendlichen | 206 |
| 6.4 Ein Anwendungsbeispiel: Kapazität eines Kugelkondensators | 208 |
| 7 Potenz- und Wurzelfunktionen | 209 |
| 7.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten | 209 |
| 7.2 Wurzelfunktionen | 211 |
| 7.3 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten | 213 |
| 7.4 Ein Anwendungsbeispiel: Beschleunigung eines Elektrons in einem elektrischen Feld | 215 |

| | |
|---|-----|
| 8 Algebraische Funktionen | 215 |
| 8.1 Definition einer algebraischen Funktion | 215 |
| 8.2 Gleichungen der Kegelschnitte | 217 |
| 8.2.1 Darstellung eines Kegelschnitts durch eine algebraische Gleichung 2. Grades | 217 |
| 8.2.2 Gleichungen eines Kreises | 218 |
| 8.2.3 Gleichungen einer Ellipse | 219 |
| 8.2.4 Gleichungen einer Hyperbel | 221 |
| 8.2.5 Gleichungen einer Parabel | 224 |
| 8.2.6 Beispiele zu den Kegelschnitten | 225 |
| 8.3 Ein Anwendungsbeispiel: Erzwungene Schwingung eines mechanischen Systems | 230 |
| 9 Trigonometrische Funktionen | 231 |
| 9.1 Definitionen und Grundbegriffe | 231 |
| 9.2 Sinus- und Kosinusfunktion | 236 |
| 9.3 Tangens- und Kotangensfunktion | 237 |
| 9.4 Wichtige Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen | 238 |
| 9.5 Anwendungen in der Schwingungslehre | 240 |
| 9.5.1 Harmonische Schwingungen (Sinusschwingungen) | 240 |
| 9.5.1.1 Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion | 240 |
| 9.5.1.2 Harmonische Schwingung eines Federpendels | 244 |
| 9.5.2 Darstellung von Schwingungen im Zeigerdiagramm | 246 |
| 9.5.3 Superposition (Überlagerung) gleichfrequenter Schwingungen | 252 |
| 9.5.4 Lissajous-Figuren | 257 |
| 10 Arkusfunktionen | 258 |
| 10.1 Das Problem der Umkehrung trigonometrischer Funktionen | 258 |
| 10.2 Arkussinusfunktion | 259 |
| 10.3 Arkuskosinusfunktion | 260 |
| 10.4 Arkustangens- und Arkuskotangensfunktion | 261 |
| 10.5 Trigonometrische Gleichungen | 265 |
| 11 Exponentialfunktionen | 267 |
| 11.1 Grundbegriffe | 267 |
| 11.2 Definition und Eigenschaften einer Exponentialfunktion | 267 |
| 11.3 Spezielle, in den Anwendungen häufig auftretende Funktionstypen | 269 |
| 11.3.1 Abklingfunktionen | 269 |
| 11.3.2 Sättigungsfunktionen | 273 |
| 11.3.3 Darstellung aperiodischer Schwingungsvorgänge durch e-Funktionen | 275 |
| 11.3.4 Gauß-Funktionen | 277 |

| | |
|---|-----|
| 12 Logarithmusfunktionen | 278 |
| 12.1 Grundbegriffe | 278 |
| 12.2 Definition und Eigenschaften einer Logarithmusfunktion | 280 |
| 12.3 Exponential- und Logarithmusgleichungen | 284 |
| 13 Hyberbel- und Areafunktionen | 286 |
| 13.1 Hyperbelfunktionen | 286 |
| 13.1.1 Definition der Hyperbelfunktionen | 286 |
| 13.1.2 Die Hyperbelfunktionen $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$ | 286 |
| 13.1.3 Die Hyperbelfunktionen $y = \tanh x$ und $y = \coth x$ | 288 |
| 13.1.4 Wichtige Beziehungen zwischen den hyperbolischen Funktionen | 289 |
| 13.2 Areafunktionen | 290 |
| 13.2.1 Definition der Areafunktionen | 290 |
| 13.2.2 Die Areafunktionen $y = \operatorname{arsinh} x$ und $y = \operatorname{arcosh} x$ | 291 |
| 13.2.3 Die Areafunktionen $y = \operatorname{artanh} x$ und $y = \operatorname{arcoth} x$ | 292 |
| 13.2.4 Darstellung der Areafunktionen durch Logarithmusfunktionen | 293 |
| 13.2.5 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes | 293 |
| Übungsaufgaben | 295 |
| Zu Abschnitt 1 | 295 |
| Zu Abschnitt 2 | 296 |
| Zu Abschnitt 3 | 296 |
| Zu Abschnitt 4 | 297 |
| Zu Abschnitt 5 | 299 |
| Zu Abschnitt 6 | 301 |
| Zu Abschnitt 7 | 301 |
| Zu Abschnitt 8 | 302 |
| Zu Abschnitt 9 und 10 | 302 |
| Zu Abschnitt 11, 12 und 13 | 305 |
| IV Differentialrechnung | 308 |
| 1 Differenzierbarkeit einer Funktion | 308 |
| 1.1 Das Tangentenproblem | 308 |
| 1.2 Ableitung einer Funktion | 309 |
| 1.3 Ableitung der elementaren Funktionen | 313 |
| 2 Ableitungsregeln | 316 |
| 2.1 Faktorregel | 316 |
| 2.2 Summenregel | 317 |
| 2.3 Produktregel | 318 |

| | | |
|--------|---|-----|
| 2.4 | Quotientenregel | 320 |
| 2.5 | Kettenregel | 322 |
| 2.6 | Logarithmische Ableitung | 327 |
| 2.7 | Ableitung der Umkehrfunktion | 328 |
| 2.8 | Implizite Differentiation | 330 |
| 2.9 | Differential einer Funktion | 332 |
| 2.10 | Höhere Ableitungen | 335 |
| 2.11 | Ableitung einer in der Parameterform dargestellten Funktion (Kurve) .. | 336 |
| 2.12 | Anstieg einer in Polarkoordinaten dargestellten Kurve | 339 |
| 2.13 | Einfache Anwendungsbeispiele aus Physik und Technik | 344 |
| 2.13.1 | Bewegung eines Massenpunktes (Geschwindigkeit, Beschleunigung) | 344 |
| 2.13.2 | Induktionsgesetz | 346 |
| 2.13.3 | Elektrischer Schwingkreis | 347 |
| 3 | Anwendungen der Differentialrechnung | 348 |
| 3.1 | Tangente und Normale | 348 |
| 3.2 | Linearisierung einer Funktion | 350 |
| 3.3 | Charakteristische Kurvenpunkte | 353 |
| 3.3.1 | Geometrische Vorbetrachtungen | 353 |
| 3.3.2 | Relative oder lokale Extremwerte | 355 |
| 3.3.3 | Wendepunkte, Sattelpunkte | 360 |
| 3.3.4 | Ergänzungen | 362 |
| 3.4 | Extremwertaufgaben | 364 |
| 3.5 | Kurvendiskussion | 370 |
| 3.6 | Näherungsweise Lösung einer Gleichung nach dem Tangentenverfahren von Newton | 375 |
| 3.6.1 | Iterationsverfahren | 375 |
| 3.6.2 | Tangentenverfahren von Newton | 376 |
| | Übungsaufgaben | 383 |
| | Zu Abschnitt 1 | 383 |
| | Zu Abschnitt 2 | 383 |
| | Zu Abschnitt 3 | 387 |
| V | Integralrechnung | 390 |
| 1 | Integration als Umkehrung der Differentiation | 390 |
| 2 | Das bestimmte Integral als Flächeninhalt | 393 |
| 2.1 | Ein einführendes Beispiel | 394 |
| 2.2 | Das bestimmte Integral | 397 |
| 3 | Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion | 403 |

| | |
|--|-----|
| 4 Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung | 406 |
| 5 Grund- oder Stammintegrale | 410 |
| 6 Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion | 412 |
| 7 Elementare Integrationsregeln | 416 |
| 8 Integrationsmethoden | 419 |
| 8.1 Integration durch Substitution | 419 |
| 8.1.1 Ein einführendes Beispiel | 419 |
| 8.1.2 Spezielle Integralsubstitutionen | 420 |
| 8.2 Partielle Integration oder Produktintegration | 426 |
| 8.3 Integration einer echt gebrochenrationalen Funktion durch Partialbruchzerlegung des Integranden | 432 |
| 8.3.1 Partialbruchzerlegung | 433 |
| 8.3.2 Integration der Partialbrüche | 435 |
| 8.4 Numerische Integrationsmethoden | 439 |
| 8.4.1 Trapezformel | 440 |
| 8.4.2 Simpsonsche Formel | 445 |
| 9 Uneigentliche Integrale | 451 |
| 10 Anwendungen der Integralrechnung | 456 |
| 10.1 Einfache Beispiele aus Physik und Technik | 456 |
| 10.1.1 Integration der Bewegungsgleichung | 456 |
| 10.1.2 Biegelinie (elastische Linie) eines einseitig eingespannten Balkens | 459 |
| 10.1.3 Spannung zwischen zwei Punkten eines elektrischen Feldes | 461 |
| 10.2 Flächeninhalt | 462 |
| 10.2.1 Bestimmtes Integral und Flächeninhalt. Ergänzungen | 462 |
| 10.2.2 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven | 468 |
| 10.3 Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsvolumen) | 473 |
| 10.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve | 479 |
| 10.5 Mantelfläche eines Rotationskörpers (Rotationsfläche) | 482 |
| 10.6 Arbeits- und Energiegrößen | 486 |
| 10.7 Lineare und quadratische Mittelwerte | 492 |
| 10.8 Schwerpunkt homogener Flächen und Körper | 496 |
| 10.8.1 Grundbegriffe | 496 |
| 10.8.2 Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche | 499 |
| 10.8.3 Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers | 505 |
| 10.9 Massenträgheitsmomente | 510 |
| 10.9.1 Grundbegriffe und einfache Beispiele | 510 |
| 10.9.2 Satz von Steiner | 514 |
| 10.9.3 Massenträgheitsmoment eines homogenen Rotationskörpers | 515 |

| | |
|--|---------|
| Übungsaufgaben | 520 |
| Zu Abschnitt 1 bis 7 | 520 |
| Zu Abschnitt 8 | 523 |
| Zu Abschnitt 9 | 526 |
| Zu Abschnitt 10 | 526 |
| VI Potenzreihenentwicklungen | 531 |
| 1 Unendliche Reihen | 531 |
| 1.1 Ein einführendes Beispiel | 531 |
| 1.2 Grundbegriffe | 533 |
| 1.2.1 Definition einer unendlichen Reihe | 533 |
| 1.2.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe | 535 |
| 1.3 Konvergenzkriterien | 538 |
| 1.3.1 Quotientenkriterium | 539 |
| 1.3.2 Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen | 542 |
| 2 Potenzreihen | 544 |
| 2.1 Definition einer Potenzreihe | 544 |
| 2.2 Konvergenzverhalten einer Potenzreihe | 545 |
| 2.3 Eigenschaften der Potenzreihen | 551 |
| 3 Taylor-Reihen | 552 |
| 3.1 Ein einführendes Beispiel | 552 |
| 3.2 Potenzreihenentwicklung einer Funktion | 554 |
| 3.2.1 Mac Laurinsche Reihe | 554 |
| 3.2.2 Taylorsche Reihe | 561 |
| 3.2.3 Tabellarische Zusammenstellung wichtiger Potenzreihenentwicklungen | 563 |
| 3.3 Anwendungen | 565 |
| 3.3.1 Näherungspolynome einer Funktion | 565 |
| 3.3.2 Integration durch Potenzreihenentwicklung des Integranden | 576 |
| 3.3.3 Grenzwertregel von Bernoulli und de L'Hospital | 579 |
| 3.4 Ein Anwendungsbeispiel: Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes | 585 |
| Übungsaufgaben | 588 |
| Zu Abschnitt 1 | 588 |
| Zu Abschnitt 2 | 589 |
| Zu Abschnitt 3 | 589 |

| | |
|--|-----|
| Anhang: Lösungen der Übungsaufgaben | 594 |
| I Allgemeine Grundlagen | 594 |
| Abschnitt 1 und 2 | 594 |
| Abschnitt 3 | 594 |
| Abschnitt 4 | 596 |
| Abschnitt 5 | 598 |
| Abschnitt 6 | 599 |
| II Vektoralgebra | 600 |
| Abschnitt 2 und 3 | 600 |
| Abschnitt 4 | 603 |
| III Funktionen und Kurven | 610 |
| Abschnitt 1 | 610 |
| Abschnitt 2 | 612 |
| Abschnitt 3 | 612 |
| Abschnitt 4 | 613 |
| Abschnitt 5 | 615 |
| Abschnitt 6 | 617 |
| Abschnitt 7 | 619 |
| Abschnitt 8 | 619 |
| Abschnitt 9 und 10 | 620 |
| Abschnitt 11, 12 und 13 | 623 |
| IV Differentialrechnung | 625 |
| Abschnitt 1 | 625 |
| Abschnitt 2 | 625 |
| Abschnitt 3 | 632 |
| V Integralrechnung | 640 |
| Abschnitt 1 bis 7 | 640 |
| Abschnitt 8 | 641 |
| Abschnitt 9 | 644 |
| Abschnitt 10 | 645 |
| VI Potenzreihenentwicklungen | 649 |
| Abschnitt 1 | 649 |
| Abschnitt 2 | 650 |
| Abschnitt 3 | 651 |
| Literaturhinweise | 659 |
| Sachwortverzeichnis | 660 |